10 Funciones y ecuaciones radicales

Hábitos de alimentación de los cuervos *(pág. 573)*

Trapecista *(pág. 565)*

Elefante asiático *(pág. 554)*

Bomberos *(pág. 549)*

Tsunami *(pág. 547)*

Mantener el dominio de las matemáticas

Evaluar expresiones que involucren raíces cuadradas

Ejemplo 1 **Evalúa $-4(\sqrt{121} - 16)$.**

$$\begin{aligned} -4(\sqrt{121} - 16) &= -4(11 - 16) && \text{Evalúa la raíz cuadrada.} \\ &= -4(-5) && \text{Resta.} \\ &= 20 && \text{Multiplica.} \end{aligned}$$

Evalúa la expresión.

1. $7\sqrt{25} + 10$
2. $-8 - \sqrt{\dfrac{64}{16}}$
3. $5\left(\dfrac{\sqrt{81}}{3} - 7\right)$
4. $-2(3\sqrt{9} + 13)$

Transformar funciones lineales

Ejemplo 2 **Haz una gráfica de $f(x) = x$ y $g(x) = -3x - 4$. Describe las transformaciones a partir de la gráfica de f a la gráfica de g.**

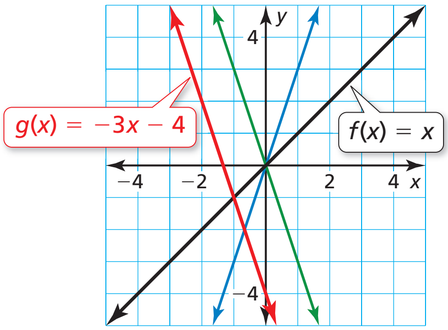
Observa que puedes escribir g como $g(x) = -3f(x) - 4$.

Paso 1 No hay traslación horizontal de la gráfica de f a la gráfica de g.

Paso 2 Estira la gráfica de f verticalmente por un factor de 3 para obtener la gráfica de $h(x) = 3x$.

Paso 3 Refleja la gráfica de h en el eje x para obtener la gráfica de $r(x) = -3x$.

Paso 4 Traslada la gráfica de r verticalmente 4 unidades hacia abajo para obtener la gráfica de $g(x) = -3x - 4$.



Haz una gráfica de f y g. Describe las transformaciones a partir de la gráfica de f a la gráfica de g.

5. $f(x) = x$; $g(x) = 2x - 2$
6. $f(x) = x$; $g(x) = \frac{1}{3}x + 5$
7. $f(x) = x$; $g(x) = -x + 3$
8. **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** Imagina que a y b representan constantes, donde $b \geq 0$. Describe las transformaciones a partir de la gráfica de $m(x) = ax + b$ a la gráfica de $n(x) = -2ax - 4b$.

Prácticas matemáticas

Los estudiantes que dominan las matemáticas distinguen el razonamiento correcto de lo que está equivocado.

Razonamiento lógico

Concepto Esencial

Razonamiento lógico y prueba por contradicción

Las matemáticas son un sistema lógico que se construye a partir de algunas suposiciones y términos no definidos. Las suposiciones se llaman *axiomas* o *postulados*. Después de comenzar con una colección de axiomas y términos no definidos, el resto de las matemáticas se construye lógicamente usando definiciones cuidadosas y teoremas (o reglas) que se basan en los axiomas o teoremas probados con anterioridad.

Para escribir una prueba indirecta, o *prueba de contradicción*, identifica el enunciado que deseas probar. Asume temporariamente que este enunciado es falso asumiendo que su opuesto es verdadero. Luego, razona lógicamente hasta que llegues a una contradicción. Señala que el enunciado original debe ser verdadero porque la contradicción prueba que la presunción temporaria es falsa.

EJEMPLO 1 Entender una prueba

Un número es *racional* cuando puede ser escrito como la razón a/b de dos enteros, donde $b \neq 0$. Usa prueba por contradicción para probar que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

SOLUCIÓN

Supón que $\sqrt{2}$ puede escribirse como la razón de dos enteros (en la forma más simple) y muestra que esta suposición conduce a una contradicción.

$\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$	Supón que $\sqrt{2}$ es racional.
$2 = \dfrac{a^2}{b^2}$	Eleva cada lado al cuadrado.
$a^2 = 2b^2$	Multiplica cada lado por b^2 e intercambia los lados izquierdo y derecho.

Esto implica que a^2 es par, lo cual solo es verdadero cuando a es par (divisible entre dos). Esto implica que a^2 es divisible entre 2^2 o 4. De modo tal que $2b^2$ también es divisible entre 4, lo que significa que b^2 es divisible entre 2, b^2 es par y b es par. Dado que a y b son pares, tienen un factor común (de al menos 2).

Esto contradice la presunción que la razón a/b se escribe en la forma más simple. Así que la presunción inicial que $\sqrt{2}$ es racional debe ser falsa. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Monitoreo del progreso

1. ¿Cuáles de las siguientes raíces cuadradas son números racionales? Explica tu razonamiento.

$$\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}$$

2. La secuencia de pasos que se muestran aparece para probar que $1 = 0$. ¿Cuál es el error en este argumento?

$x = 1$	Sea $x = 1$.
$x - 1 = 0$	Resta 1 de cada lado.
$x(x - 1) = 0$	Multiplica cada lado por x.
$x = 0$	Divide cada lado entre $(x - 1)$.

10.1 Hacer una gráfica de las funciones de raíz cuadrada

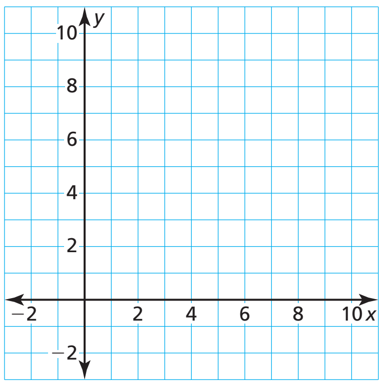
Pregunta esencial ¿Cuáles son algunas de las características de la gráfica de una función de raíz cuadrada?

EXPLORACIÓN 1 Hacer una gráfica de las funciones de raíz cuadrada

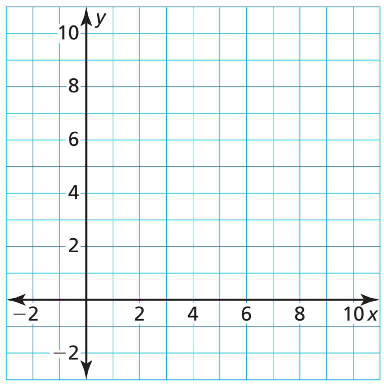
Trabaja con un compañero.

- Haz una tabla de valores para cada función.
- Usa la tabla para dibujar la gráfica de cada función.
- Describe el dominio de cada función.
- Describe el rango de cada función.

a. $y = \sqrt{x}$



b. $y = \sqrt{x + 2}$



BUSCAR UN PATRÓN

Para dominar las matemáticas, necesitas observar detenidamente para discernir un patrón o una estructura.

EXPLORACIÓN 2 Escribir funciones de raíz cuadrada

Trabaja con un compañero. Escribe una función de raíz cuadrada $y = f(x)$, que tenga los valores. Luego usa la función para completar la tabla.

a.

x	$f(x)$
-4	0
-3	
-2	
-1	$\sqrt{3}$
0	2
1	

b.

x	$f(x)$
-4	1
-3	
-2	
-1	$1 + \sqrt{3}$
0	3
1	

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cuáles son algunas de las características de la gráfica de una función de raíz cuadrada?

4. Haz una gráfica de cada función. Luego, compara la gráfica a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

a. $g(x) = \sqrt{x - 1}$ **b.** $g(x) = \sqrt{x} - 1$ **c.** $g(x) = 2\sqrt{x}$ **d.** $g(x) = -2\sqrt{x}$

10.1 Lección

Qué aprenderás

- Hacer una gráfica de las funciones de raíz cuadrada.
- Comparar las funciones de raíz cuadrada usando tasas de cambio promedio.
- Resolver problemas de la vida real incluyendo funciones de raíz cuadrada.

Vocabulario Esencial

función de raíz cuadrada, *pág. 544*
función radical, *pág. 545*

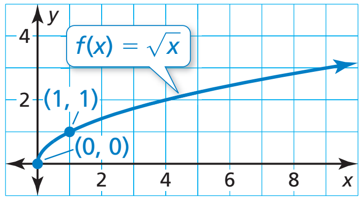
Anterior
radicando
transformación
tasa promedio de cambio

Hacer una gráfica de las funciones de raíz cuadrada

Concepto Esencial

Funciones de raíz cuadrada

Una **función de raíz cuadrada** es una función que contiene una raíz cuadrada con la variable independiente en el radicando. La función madre para la familia de funciones de raíz cuadrada es $f(x) = \sqrt{x}$. El dominio de f es $x \geq 0$ y el rango de f es $y \geq 0$.



CONSEJO DE ESTUDIO

La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ comienza a (0, 0) y aumenta en el dominio entero. Por lo tanto, el valor mínimo de f es 0.

El valor del radicando en una función de raíz cuadrada no puede ser negativo. Por lo tanto, el dominio de una función de raíz cuadrada incluye valores x para los cuales el radicando es mayor o igual a 0.

EJEMPLO 1 Describir el dominio de una función de raíz cuadrada

Describe el dominio de $f(x) = 3\sqrt{x - 5}$.

SOLUCIÓN

El radicando no puede ser negativo. Por lo tanto, $x - 5$ es mayor o igual a 0.

$x - 5 \geq 0$ Escribe una desigualdad para el dominio.

$x \geq 5$ Suma 5 a cada lado.

▶ El dominio es el conjunto de números reales mayores o iguales a 5.

EJEMPLO 2 Hacer una gráfica de una función de raíz cuadrada

Haz una gráfica de $f(x) = \sqrt{x} + 3$. Describe la tasa de la función.

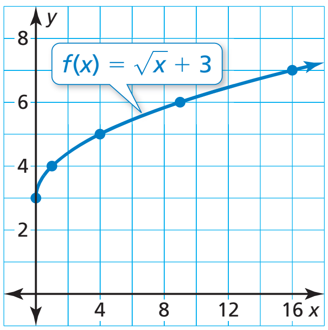
SOLUCIÓN

Paso 1 Usa el dominio f, $x \geq 0$, para hacer una tabla de valores.

x	0	1	4	9	16
$f(x)$	3	4	5	6	7

Paso 2 Marca los pares ordenados.

Paso 3 Dibuja una curva suave a través de los puntos, comenzando en (0,3).



▶ De la gráfica, puedes ver que el rango de f es $y \geq 3$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Describe el dominio de la función.

1. $f(x) = 10\sqrt{x}$ **2.** $y = \sqrt{2x} + 7$ **3.** $h(x) = \sqrt{-x + 1}$

Haz una gráfica de la función. Describe el rango.

4. $g(x) = \sqrt{x} - 4$ **5.** $y = \sqrt{x + 5}$ **6.** $n(x) = 5\sqrt{x}$

CONSEJO DE ESTUDIO

Estudiarás otro tipo de función radical en la siguiente sección.

Una **función radical** es una función que contiene una expresión radical con la variable independiente en el radicando. Una función de raíz cuadrada es un tipo de función radical.

Puedes transformar gráficas de funciones radicales del mismo modo en que transformaste gráficas de funciones anteriormente. En el Ejemplo 2, observa que la gráfica de f es una traslación vertical de la gráfica de la función de raíz cuadrada madre.

Concepto Esencial

Transformación	Notación $f(x)$	Ejemplos	
Traslación horizontal La gráfica cambia de izquierda a derecha.	$f(x - h)$	$g(x) = \sqrt{x - 2}$ $g(x) = \sqrt{x + 3}$	2 unidades a la derecha 3 unidades a la izquierda
Traslación vertical La gráfica cambia hacia arriba o hacia abajo.	$f(x) + k$	$g(x) = \sqrt{x} + 7$ $g(x) = \sqrt{x} - 1$	7 unidades hacia arriba 1 unidad hacia abajo
Reflexión La gráfica voltea los ejes x o y.	$f(-x)$ $-f(x)$	$g(x) = \sqrt{-x}$ $g(x) = -\sqrt{x}$	en el eje y en el eje x
Alargamiento o encogimiento horizontal La gráfica se alarga hacia afuera o se encoge hacia el eje y.	$f(ax)$	$g(x) = \sqrt{3x}$ $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$	encoge por un factor de $\frac{1}{3}$ alarga por un factor de 2
Alargamiento o encogimiento vertical La gráfica se alarga hacia afuera o se encoge hacia el eje x.	$a \cdot f(x)$	$g(x) = 4\sqrt{x}$ $g(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x}$	alarga por un factor de 4 encoge por un factor de $\frac{1}{5}$

EJEMPLO 3 Comparar gráficas de funciones de raíz cuadrada

Haz una gráfica de $g(x) = -\sqrt{x - 2}$. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

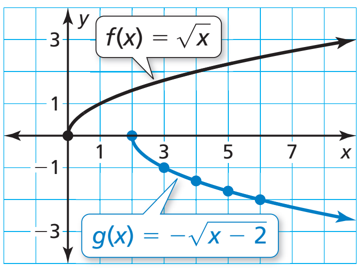
SOLUCIÓN

Paso 1 Usa el dominio de g, $x \geq 2$, para hacer una tabla de valores.

x	2	3	4	5	6
$g(x)$	0	-1	-1.4	-1.7	-2

Paso 2 Marca los pares ordenados.

Paso 3 Dibuja una curva suave a través de los puntos, comenzando en (2,0).



La gráfica de g es una traslación de 2 unidades a la derecha y una reflexión en el eje x de la gráfica de f.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Haz una gráfica de la función. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

7. $h(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x}$ **8.** $g(x) = \sqrt{x} - 6$ **9.** $m(x) = -3\sqrt{x}$

Para hacer una gráfica de una función de raíz cuadrada de la forma $y = a\sqrt{x-h} + k$, donde $a \neq 0$, comienza en (h, k).

EJEMPLO 4 Hacer una gráfica de $y = a\sqrt{x-h} + k$

RECUERDA

La gráfica de $y = a \cdot f(x - h) + k$ puede obtenerse de la gráfica de $y = f(x)$ usando los pasos que aprendiste en la Sección 3.6.

Imagina que $g(x) = -2\sqrt{x-3} - 2$. (a) Describe las transformaciones a partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ a la gráfica de g. (b) Haz una gráfica de g.

SOLUCIÓN

a. Paso 1 Traslada la gráfica de f horizontalmente 3 unidades a la derecha para obtener la gráfica de $t(x) = \sqrt{x-3}$.

Paso 2 Alarga la gráfica de t verticalmente por un factor de 2 para obtener la gráfica de $h(x) = 2\sqrt{x-3}$.

Paso 3 Refleja la gráfica de h en el eje x para obtener la gráfica de $r(x) = -2\sqrt{x-3}$.

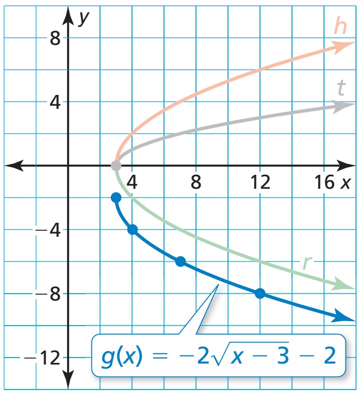
Paso 4 Traslada la gráfica de r verticalmente 2 unidades hacia abajo para obtener la gráfica de $g(x) = -2\sqrt{x-3} - 2$.

b. Paso 1 Usa el dominio, $x \geq 3$, para hacer una tabla de valores.

x	3	4	7	12
$g(x)$	-2	-4	-6	-8

Paso 2 Marca los pares ordenados.

Paso 3 Comienza en $(h, k) = (3, -2)$ y dibuja una curva suave a través de los puntos.



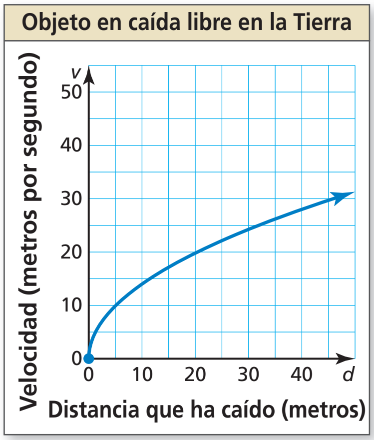
Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

10. Imagina que $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} + 1$. Describe las transformaciones de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ a la gráfica de g. Luego, haz una gráfica de g.

Comparar tasas de cambio promedio

EJEMPLO 5 Comparar funciones de raíz cuadrada

El modelo $v(d) = \sqrt{2gd}$ representa la velocidad v (en metros por segundo) de un objeto en caída libre en la luna, donde g es la constante 1.6 metros por segundo cuadrado y d es la distancia (en metros) que el objeto ha caído. La velocidad de un objeto en caída libre en la Tierra se muestra en la gráfica. Compara las velocidades encontrando e interpretando sus tasas de cambio promedio en el intervalo $d = 0$ a $d = 10$.



SOLUCIÓN

Para calcular las tasas de cambio promedio, usa los puntos cuyas coordenadas d son 0 y 10.

Tierra: Usa la gráfica para estimar. Usa (0, 0) y (10, 14).

$$\frac{v(10) - v(0)}{10 - 0} \approx \frac{14 - 0}{10} = 1.4 \qquad \text{Tasa de cambio promedio en la Tierra}$$

Luna: Evalúa v cuando $d = 0$ y $d = 10$.

$$v(0) = \sqrt{2(1.6)(0)} = 0 \quad \text{y} \quad v(10) = \sqrt{2(1.6)(10)} = \sqrt{32} \approx 5.7$$

Usa (0, 0) y $\left(10, \sqrt{32}\right)$.

$$\frac{v(10) - v(0)}{10 - 0} = \frac{\sqrt{32} - 0}{10} \approx 0.57 \qquad \text{Tasa de cambio promedio en la luna}$$

▶ De 0 a 10 metros, la velocidad de un objeto en caída libre aumenta a una tasa promedio de aproximadamente 1.4 metros por segundo por metro en la Tierra y aproximadamente 0.57 metros por segundo por metro en la luna.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

11. En el Ejemplo 5, compara las velocidades hallando e interpretando sus tasas de cambio promedio en el intervalo $d = 30$ a $d = 40$.

Resolver problemas de la vida real

EJEMPLO 6 **Uso en la vida real**

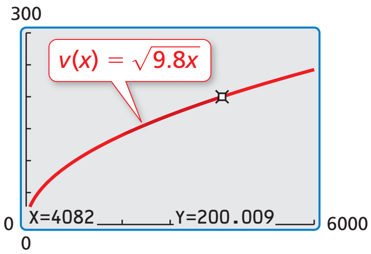
La velocidad v (en metros por segundo) de un tsunami puede modelarse por la función $v(x) = \sqrt{9.8x}$, donde x es la profundidad del agua (en metros). (a) Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función. ¿A qué profundidad la velocidad del tsunami excede los 200 metros por segundo? (b) ¿Qué sucede a la tasa de cambio promedio de la velocidad a medida que aumenta la profundidad del agua?

SOLUCIÓN

1. **Comprende el problema** Conoces la función que modela la velocidad de un tsunami en base a la profundidad del agua. Se te pide que hagas una gráfica de la función usando una calculadora y que encuentres la profundidad del agua donde la velocidad excede los 200 metros por segundo. Luego, se te pide que describas la tasa de cambio promedio de la velocidad a medida que la profundidad del agua aumenta.

2. **Haz un plan** Haz una gráfica de la función usando una calculadora. Usa la función *trazar* para hallar el valor de x cuando $v(x)$ es aproximadamente 200. Luego, calcula y compara las tasas de cambio promedio de la velocidad a diferentes intervalos.

3. **Resuelve el problema**



a. Paso 1 Ingresa la función en tu calculadora y haz una gráfica de ella.

Paso 2 Usa la función *trazar* para hallar el valor de x cuando $v(x) \approx 200$.

▶ La velocidad excede los 200 metros por segundo a una profundidad de 4082 metros aproximadamente.

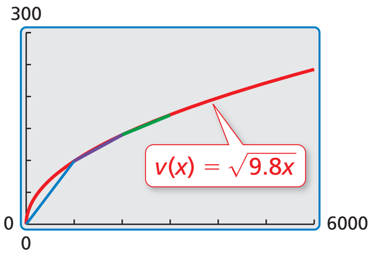
b. Calcula las tasas de cambio promedio en intervalos $x = 0$ a $x = 1000$, $x = 1000$ a $x = 2000$ y $x = 2000$ a $x = 3000$.

$$\frac{v(1000) - v(0)}{1000 - 0} = \frac{\sqrt{9800} - 0}{1000} \approx 0.099 \qquad \text{0 a 1000 metros}$$

$$\frac{v(2000) - v(1000)}{2000 - 1000} = \frac{\sqrt{19{,}600} - \sqrt{9800}}{1000} \approx 0.041 \qquad \text{1000 a 2000 metros}$$

$$\frac{v(3000) - v(2000)}{3000 - 2000} = \frac{\sqrt{29{,}400} - \sqrt{19{,}600}}{1000} \approx 0.031 \qquad \text{2000 a 3000 metros}$$

▶ La tasa de cambio promedio de la velocidad disminuye a medida que la profundidad del agua aumenta.



4. **Verifícalo** Para verificar la respuesta en la parte (a), halla $v(x)$ cuando $x = 4082$.

$$v(4082) = \sqrt{9.8(4082)} \approx 200 \checkmark$$

En la parte (b), las pendientes de los segmentos de la línea (que se muestran a la izquierda) que representan las tasas de cambio promedio en los intervalos están disminuyendo. Por lo tanto, la respuesta a la parte (b) es razonable.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

12. **¿QUÉ PASA SI?** ¿A qué profundidad la velocidad del tsunami excede los 100 metros por segundo?

10.1 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Una _________ es una función que contiene una expresión radical con la variable independiente en el radicando.

2. **VOCABULARIO** ¿Es $y = 2x\sqrt{5}$ una función de raíz cuadrada? Explica.

3. **ESCRIBIR** ¿Cómo describes el dominio de una función de raíz cuadrada?

4. **RAZONAR** ¿La gráfica de $g(x) = 1.25\sqrt{x}$ es un alargamiento vertical o un encogimiento vertical de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$? Explica.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 5–14, describe el dominio de la función. (*Consulta el Ejemplo 1*).

5. $y = 8\sqrt{x}$

6. $y = \sqrt{4x}$

7. $y = 4 + \sqrt{-x}$

8. $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x} + 1$

9. $h(x) = \sqrt{x - 4}$

10. $p(x) = \sqrt{x + 7}$

11. $f(x) = \sqrt{-x + 8}$

12. $g(x) = \sqrt{-x - 1}$

13. $m(x) = 2\sqrt{x + 4}$

14. $n(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-x} - 2$

En los Ejercicios 15–18, une la función con su gráfica. Describe el rango.

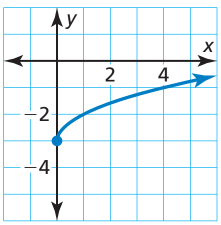
15. $y = \sqrt{x - 3}$

16. $y = 3\sqrt{x}$

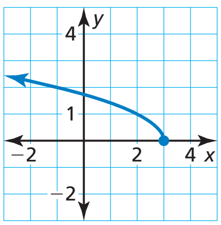
17. $y = \sqrt{x} - 3$

18. $y = \sqrt{-x + 3}$

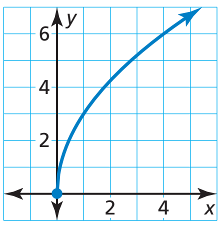
A.



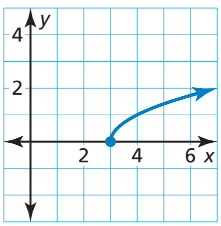
B.



C.



D.



En los Ejercicios 19–26, haz una gráfica de la función. Describe el rango. (*Consulta el Ejemplo 2*).

19. $y = \sqrt{3x}$

20. $y = 4\sqrt{-x}$

21. $y = \sqrt{x} + 5$

22. $y = -2 + \sqrt{x}$

23. $f(x) = -\sqrt{x - 3}$

24. $g(x) = \sqrt{x + 4}$

25. $h(x) = \sqrt{x + 2} - 2$

26. $f(x) = -\sqrt{x - 1} + 3$

En los Ejercicios 27–34, haz una gráfica de la función. Compara la gráfica a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$. (*Consulta el Ejemplo 3*).

27. $g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}$

28. $r(x) = \sqrt{2x}$

29. $h(x) = \sqrt{x + 3}$

30. $q(x) = \sqrt{x} + 8$

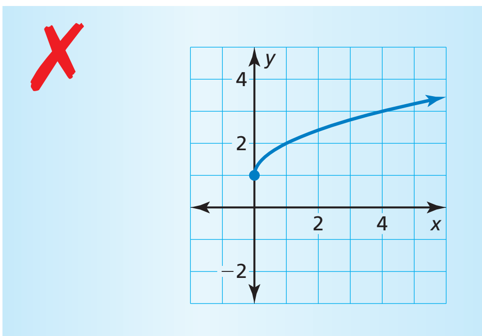
31. $p(x) = \sqrt{-\frac{1}{3}x}$

32. $g(x) = -5\sqrt{x}$

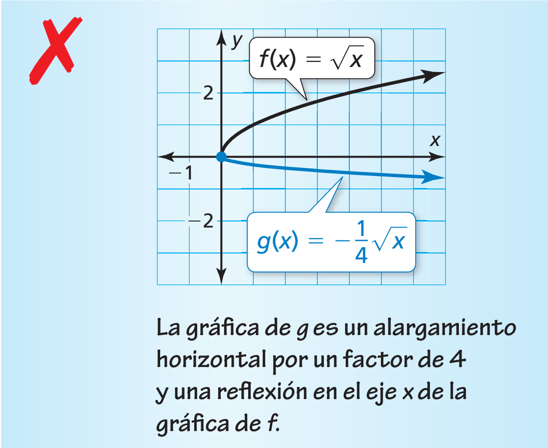
33. $m(x) = -\sqrt{x} - 6$

34. $n(x) = -\sqrt{x - 4}$

35. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al hacer la gráfica de la función $y = \sqrt{x} + 1$.



36. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al comparar la gráfica de $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{x}$ con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.



En los Ejercicios 37–44, describe las transformaciones a partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ a la gráfica de h. Luego, haz una gráfica de h. *(Consulta el Ejemplo 4).*

37. $h(x) = 4\sqrt{x + 2} - 1$

38. $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - 6} + 3$

39. $h(x) = 2\sqrt{-x} - 6$

40. $h(x) = -\sqrt{x - 3} - 2$

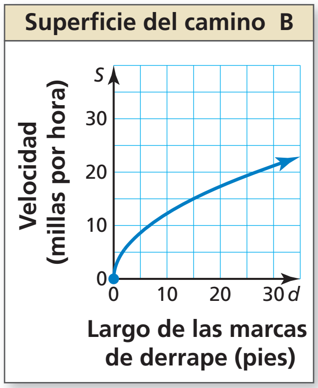
41. $h(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x + 3} - 3$

42. $h(x) = 2\sqrt{x - 1} + 4$

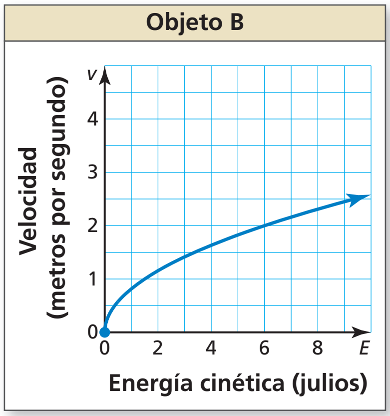
43. $h(x) = -2\sqrt{x - 1} + 5$

44. $h(x) = -5\sqrt{x + 2} - 1$

45. **COMPARAR FUNCIONES** El modelo $S(d) = \sqrt{30df}$ representa la velocidad S (en millas por hora) de una camioneta antes de derrapar y detenerse, donde f es el factor de arrastre de la superficie del camino y d es el largo (en pies) de las marcas de derrape. El factor de arrastre de la Superficie del Camino A es 0.75. La gráfica muestra la velocidad de la camioneta en la Superficie del Camino B. Compara las velocidades hallando e interpretando sus tasas de cambio promedio en el intervalo $d = 0$ a $d = 15$. *(Consulta el Ejemplo 5).*



46. **COMPARAR FUNCIONES** La velocidad v (en metros por segundo) de un objeto en movimiento está dado mediante $v(E) = \sqrt{\frac{2E}{m}}$, donde E es la energía cinética del objeto (en julios) y m es la masa del objeto (en kilogramos). La masa del Objeto A es 4 kilogramos. La gráfica muestra la velocidad del Objeto B. Compara las velocidades de los objetos hallando e interpretando las tasas de cambio promedio en el intervalo $E = 0$ a $E = 6$.



47. **FINAL ABIERTO** Considera la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

a. Escribe una función que sea una traslación vertical de la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

b. Escribe una función que sea una reflexión de la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

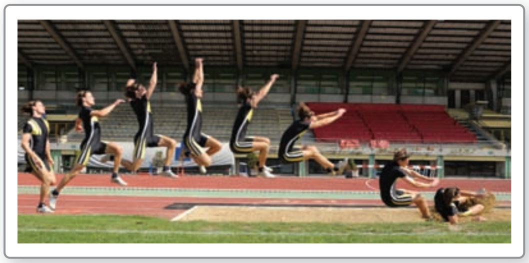
48. **RAZONAR** ¿Puede el dominio de una función de raíz cuadrada incluir números negativos? ¿El rango puede incluir números negativos? Explica tu razonamiento.

49. **RESOLVER PROBLEMAS** La presión de la boca de una manguera de incendio permite a los bomberos controlar la cantidad de agua que usan en un incendio. La tasa de flujo f (en galones por minuto) puede modelarse mediante la función $f = 120\sqrt{p}$, donde p es la presión de la boca (en libras por pulgada cuadrada). *(Consulta el Ejemplo 6).*

a. Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función. ¿A qué presión la tasa de flujo excede 300 galones por minuto?

b. ¿Qué sucede a la tasa de cambio promedio de la tasa de flujo a medida que la presión aumenta?

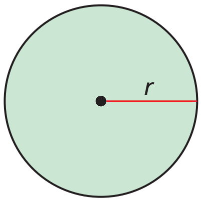
50. **RESOLVER PROBLEMAS** La velocidad s (en metros por segundo) de un saltador antes de saltar puede modelarse por la función $s = 10.9\sqrt{h}$, donde h es la altura máxima (en metros desde el suelo) del saltador.



a. Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función. Un saltador corre 9.2 metros por segundo. Estima la altura máxima del saltador.

b. Supón que la pista y la marca están elevadas sobre una plataforma levemente más alta que el suelo. ¿Cómo se transformaría la gráfica de la función?

51. **CONEXIONES MATEMÁTICAS** El radio r de un círculo se da mediante $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$, donde A es el área del círculo.



a. Describe el dominio de la función. Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función.

b. Usa la función *trazar* para aproximar el área de un círculo con un radio de 5.4 pulgadas.

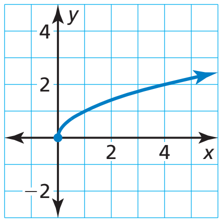
52. **RAZONAR** Considera la función $f(x) = 8a\sqrt{x}$.

a. ¿Para qué valor de a la gráfica de f será idéntica a la gráfica de la función de raíz cuadrada madre?

b. ¿Para qué valores de a la gráfica de f será un alargamiento vertical de la gráfica de la función de raíz cuadrada madre?

c. ¿Para qué valores de a la gráfica de f será un encogimiento vertical y una reflexión de la gráfica de la función de raíz cuadrada madre?

53. **RAZONAR** La gráfica representa la función $f(x) = \sqrt{x}$.



a. ¿Cuál es el valor mínimo de la función?

b. ¿La función tiene un valor máximo? Explica.

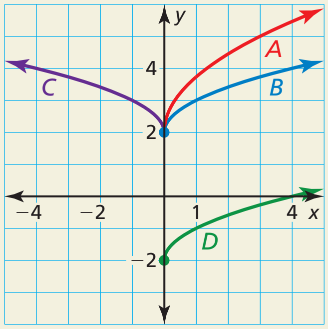
c. Escribe una función de raíz cuadrada que tenga un valor máximo. ¿La función tiene un valor mínimo? Explica.

d. Escribe una función de raíz cuadrada que tenga un valor mínimo de -4.

54. **¿CÓMO LO VES?** Une cada función con su gráfica. Explica tu razonamiento.

A. $f(x) = \sqrt{x} + 2$ **B.** $m(x) = f(x) - 4$

C. $n(x) = f(-x)$ **D.** $p(x) = f(3x)$



55. **RAZONAR** Sin hacer una gráfica, determina cuál gráfica de la función se eleva más abruptamente, $f(x) = 5\sqrt{x}$ o $g(x) = \sqrt{5x}$. Explica tu razonamiento.

56. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Usa un enfoque gráfico para hallar las soluciones de $x - 1 = \sqrt{5x - 9}$. Muestra tu trabajo. Verifica tus soluciones algebraicamente.

57. **FINAL ABIERTO** Escribe una función radical que tenga un dominio de todos los números reales mayores que o iguales a -5 y un rango de todos los números reales menores que o iguales a 3.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Evalúa la expresión. *(Sección 6.2)*

58. $\sqrt[3]{343}$ **59.** $\sqrt[3]{-64}$ **60.** $-\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$

Factoriza el polinomio. *(Sección 7.5)*

61. $x^2 + 7x + 6$ **62.** $d^2 - 11d + 28$ **63.** $y^2 - 3y - 40$

10.2 Hacer una gráfica de las funciones de raíz cúbica

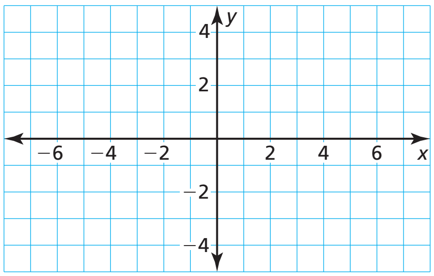
Pregunta esencial ¿Cuáles son algunas características de la gráfica de una función de raíz cúbica?

EXPLORACIÓN 1 Hacer una gráfica de las funciones de raíz cúbica

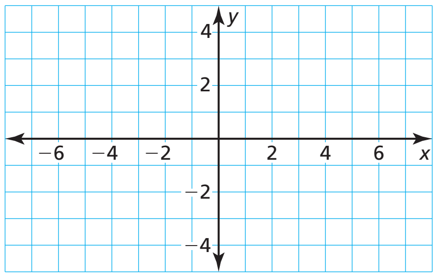
Trabaja con un compañero.

- Haz una tabla de valores para cada función. Usa valores positivos y negativos de x.
- Usa la tabla para dibujar la gráfica de cada función.
- Describe el dominio de cada función.
- Describe el rango de cada función.

a. $y = \sqrt[3]{x}$



b. $y = \sqrt[3]{x + 3}$



BUSCAR REGULARIDAD EN EL RAZONAMIENTO REPETIDO

Para dominar las matemáticas, necesitas darte cuenta si los cálculos se repiten y buscar tanto métodos generales como atajos.

EXPLORACIÓN 2 Escribir funciones de raíz cúbica

Trabaja con un compañero. Escribe una función de raíz cúbica, $y = f(x)$, que tenga los valores dados. Luego, usa esa función para completar la tabla.

a.

x	$f(x)$
-4	0
-3	
-2	
-1	$\sqrt[3]{3}$
0	

x	$f(x)$
1	
2	
3	
4	2
5	

b.

x	$f(x)$
-4	1
-3	
-2	
-1	$1 + \sqrt[3]{3}$
0	

x	$f(x)$
1	
2	
3	
4	3
5	

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cuáles son algunas de las características de la gráfica de una función de la raíz cúbica?

4. Haz una gráfica de cada función. Luego compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

a. $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

b. $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$

c. $g(x) = 2\sqrt[3]{x}$

d. $g(x) = -2\sqrt[3]{x}$

10.2 Lección

Qué aprenderás

- Hacer una gráfica de las funciones de raíz cúbica.
- Comparar las funciones de raíz cúbica usando las tasas de cambio promedio.
- Resolver problemas de la vida real incluyendo funciones de raíz cúbica.

Vocabulario Esencial

función de raíz cúbica, *pág. 552*

Anterior

función radical

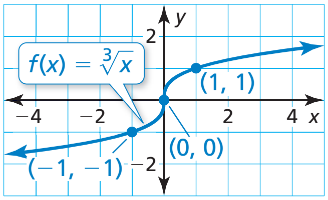
índice

Hacer una gráfica de las funciones de raíz cúbica

Concepto Esencial

Funciones de raíz cúbica

Una **función de raíz cúbica** es una función radical con un índice de 3. La función madre para la familia de funciones de raíz cúbica es $f(x) = \sqrt[3]{x}$. El dominio y el rango de f son todos números reales.



La gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ aumenta en el dominio entero.

Puedes transformar gráficas de funciones de raíz cúbica del mismo modo en que transformaste gráficas de funciones de raíz cuadrada.

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Usa valores de x para que la raíz cúbica del radicando sea un entero. Eso facilita hacer los cálculos y marcar los puntos.

EJEMPLO 1 Comparar gráficas de funciones de raíz cúbica

Haz una gráfica de $h(x) = \sqrt[3]{x} - 4$. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

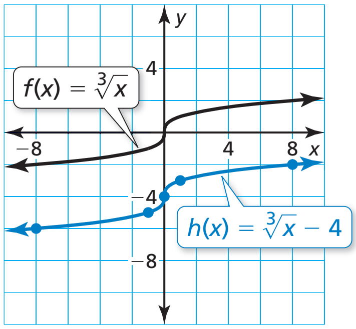
SOLUCIÓN

Paso 1 Haz una tabla de valores.

x	−8	−1	0	1	8
$h(x)$	−6	−5	−4	−3	−2

Paso 2 Marca los pares ordenados.

Paso 3 Dibuja una curva suave a través de los puntos.



- La gráfica de h es una traslación de 4 unidades hacia debajo de la gráfica de f.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Haz una gráfica de la función. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

1. $h(x) = \sqrt[3]{x} + 3$

2. $m(x) = \sqrt[3]{x - 5}$

3. $g(x) = 4\sqrt[3]{x}$

EJEMPLO 2 Comparar gráficas de funciones de raíz cúbica

Haz una gráfica de $g(x) = -\sqrt[3]{x + 2}$. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

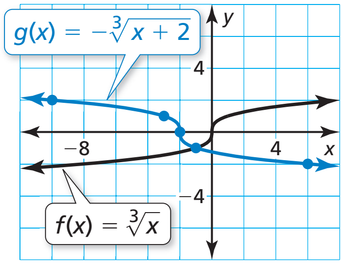
SOLUCIÓN

Paso 1 Haz una tabla de valores.

x	-10	-3	-2	-1	6
$g(x)$	2	1	0	-1	-2

Paso 2 Marca los pares ordenados.

Paso 3 Dibuja una curva suave a través de los puntos.



▶ La gráfica de g es una traslación de 2 unidades a la izquierda y una reflexión en el eje x de la gráfica de f.

RECUERDA

La gráfica de $y = a \cdot f(x - h) + k$ se puede obtener de la gráfica de $y = f(x)$ usando los pasos que aprendiste en la Sección 3.6.

EJEMPLO 3 Hacer una gráfica de $y = a\sqrt[3]{x - h} + k$

Imagina que $g(x) = 2\sqrt[3]{x - 3} + 4$. (a) Describe las transformaciones a partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a la gráfica de g. (b) Haz la gráfica de g.

SOLUCIÓN

a. Paso 1 Traslada la gráfica de f horizontalmente 3 unidades a la derecha para obtener la gráfica de $t(x) = \sqrt[3]{x - 3}$.

Paso 2 Alarga la gráfica de t verticalmente por el factor de 2 para obtener la gráfica de $h(x) = 2\sqrt[3]{x - 3}$.

Paso 3 Dado que $a > 0$, no hay reflexión.

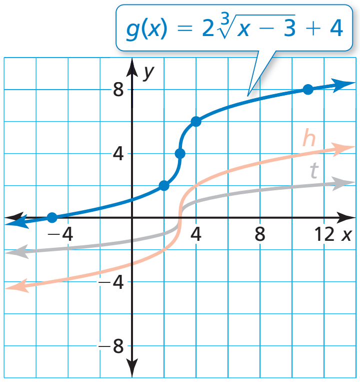
Paso 4 Traslada la gráfica de h verticalmente 4 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $g(x) = 2\sqrt[3]{x - 3} + 4$.

b. Paso 1 Haz una tabla de valores.

x	-5	2	3	4	11
$g(x)$	0	2	4	6	8

Paso 2 Marca los pares ordenados.

Paso 3 Dibuja una curva suave a través de los puntos.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

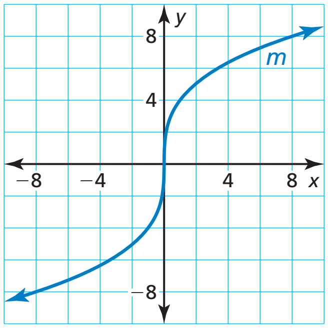
Haz una gráfica de la función. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

4. $g(x) = \sqrt[3]{0.5x} + 5$ **5.** $h(x) = 4\sqrt[3]{x - 1}$ **6.** $n(x) = \sqrt[3]{4 - x}$

7. Imagina que $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{x + 2} - 4$. Describe las transformaciones a partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a la gráfica de g. Luego haz la gráfica de g.

Comparar tasas de cambio promedio

EJEMPLO 4 **Comparar funciones de raíz cúbica**



Se muestra la gráfica de la función de raíz cúbica m. Compara la tasa de cambio promedio de m con la tasa de cambio promedio de $h(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}x}$ en el intervalo $x = 0$ a $x = 8$.

SOLUCIÓN

Para calcular las tasas de cambio promedio, usa puntos cuyas coordenadas x sean 0 y 8.

Función m: Usa la gráfica para estimar. Usa (0, 0) y (8, 8).

$$\frac{m(8) - m(0)}{8 - 0} \approx \frac{8 - 0}{8} = 1$$ Tasa de cambio promedio de m

Función h: Evalúa h cuando $x = 0$ y $x = 8$.

$$h(0) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(0)} = 0 \quad \text{y} \quad h(8) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(8)} = \sqrt[3]{2} \approx 1.3$$

Usa (0, 0) y $\left(8, \sqrt[3]{2}\right)$.

$$\frac{h(8) - h(0)}{8 - 0} = \frac{\sqrt[3]{2} - 0}{8} \approx 0.16$$ Tasa de cambio promedio de h

▶ La tasa de cambio promedio de m es $1 \div \frac{\sqrt[3]{2}}{8} \approx 6.3$ veces mayor que la tasa de cambio promedio de h en el intervalo $x = 0$ a $x = 8$.

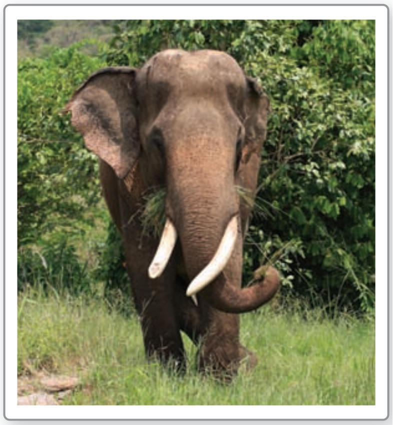
Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

8. En el Ejemplo 4, compara las tasas de cambio promedio en el intervalo $x = 2$ a $x = 10$.

Resolver problemas de la vida real

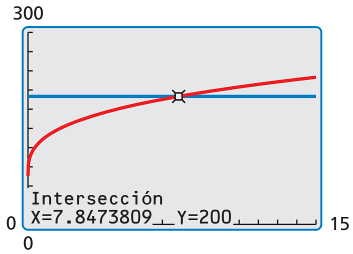
EJEMPLO 5 **Uso en la vida real**



La altura h del hombro (en centímetros) de un elefante asiático macho puede representarse mediante la función $h = 62.5\sqrt[3]{t} + 75.8$, donde t es la edad (en años) del elefante. Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función. Estima la edad de un elefante cuyo hombro tiene una altura de 200 centímetros.

SOLUCIÓN

Paso 1 Ingresa $y_1 = 62.5\sqrt[3]{t} + 75.8$ y $y_2 = 200$ en tu calculadora y haz la gráfica de la ecuación. Elige una ventana de visualización que muestre el punto donde las gráficas se intersecan.



Paso 2 Usa la función *intersección* para hallar la coordenada x del punto de intersección.

▶ Las dos gráficas se intersecan en aproximadamente (8, 200). Por lo tanto, el elefante tiene alrededor de 8 años.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

9. **¿QUÉ PASA SI?** Estima la edad de un elefante cuyo hombro tiene una altura de 175 centímetros.

10.2 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** El ___________ del radical en una función de raíz cúbica es 3.

2. **ESCRIBIR** Describe el dominio y el rango de la función $f(x) = \sqrt[3]{x-4} + 1$.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

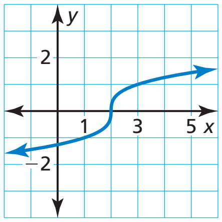
En los Ejercicios 3–6, une la función con su gráfica.

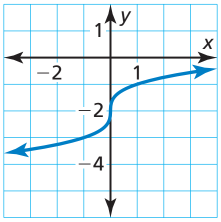
3. $y = \sqrt[3]{x+2}$

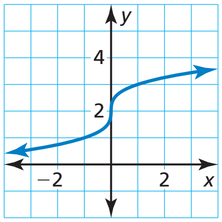
4. $y = \sqrt[3]{x-2}$

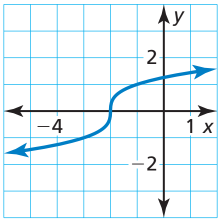
5. $y = \sqrt[3]{x} + 2$

6. $y = \sqrt[3]{x} - 2$

A.


B.


C.


D.


En los Ejercicios 7–12, haz una gráfica de la función. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

7. $h(x) = \sqrt[3]{x-4}$

8. $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

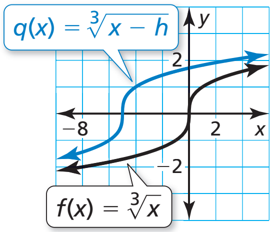
9. $m(x) = \sqrt[3]{x} + 5$

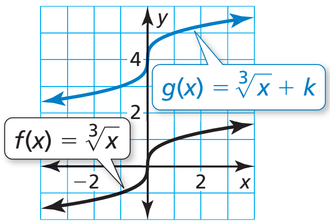
10. $q(x) = \sqrt[3]{x} - 3$

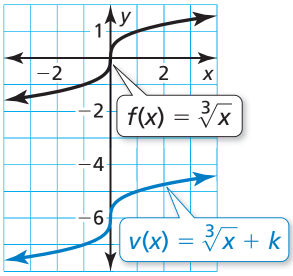
11. $p(x) = 6\sqrt[3]{x}$

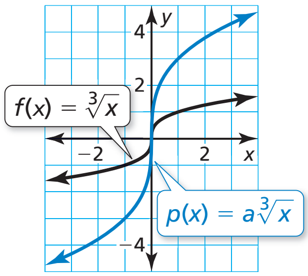
12. $j(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x}$

En los Ejercicios 13–16, compara las gráficas. Halla el valor de *h*, *k*, o *a*.

13.


14.


15.


16.


En los Ejercicios 17–26, haz la gráfica de la función. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$. *(Consulta el Ejemplo 2).*

17. $r(x) = -\sqrt[3]{x-2}$

18. $h(x) = -\sqrt[3]{x} + 3$

19. $k(x) = 5\sqrt[3]{x+1}$

20. $j(x) = 0.5\sqrt[3]{x-4}$

21. $g(x) = 4\sqrt[3]{x} - 3$

22. $m(x) = 3\sqrt[3]{x} + 7$

23. $n(x) = \sqrt[3]{-8x} - 1$

24. $v(x) = \sqrt[3]{5x} + 2$

25. $q(x) = \sqrt[3]{2(x+3)}$

26. $p(x) = \sqrt[3]{3(1-x)}$

En los Ejercicios 27–32, describe las transformaciones a partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a la gráfica de la función dada. Luego, haz la gráfica de la función dada. *(Consulta el Ejemplo 3).*

27. $g(x) = \sqrt[3]{x-4} + 2$

28. $n(x) = \sqrt[3]{x+1} - 3$

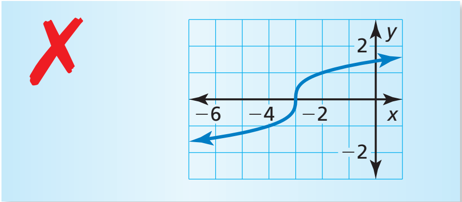
29. $j(x) = -5\sqrt[3]{x+3} + 2$

30. $k(x) = 6\sqrt[3]{x-9} - 5$

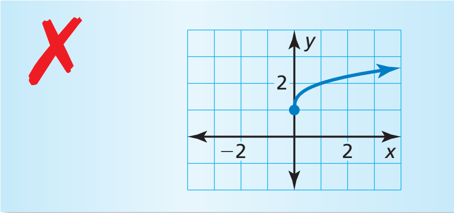
31. $v(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x-1} + 7$

32. $h(x) = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{x+4} - 3$

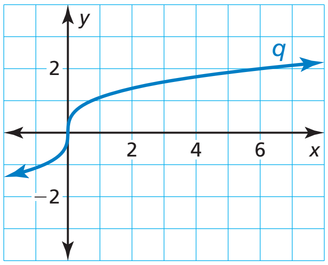
33. **ANÁLISIS DE ERRORES** Describe y corrige el error cometido al hacer la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$.



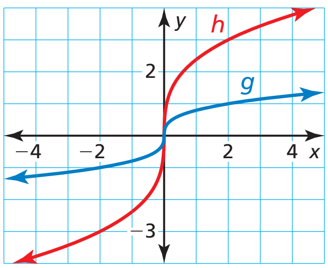
34. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hacer la gráfica de la función $h(x) = \sqrt[3]{x} + 1$.



35. COMPARAR FUNCIONES Se muestra la gráfica de la función de raíz cúbica q. Compara la tasa de cambio promedio de q con la tasa de cambio promedio de $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$ en el intervalo $x = 0$ a $x = 6$. *(Consulta el Ejemplo 4).*



36. COMPARAR FUNCIONES Se muestran las gráficas de dos funciones de raíz cúbica. Compara las tasas de cambio promedio de las dos funciones en el intervalo $x = -2$ a $x = 2$.

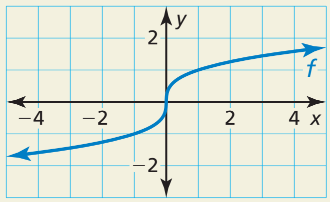


37. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Para un automóvil de carrera que pesa 1600 kilogramos, la velocidad v (en kilómetros por hora) que alcanza al final de la carrera del cuarto de milla puede modelarse por la función $v = 23.8\sqrt[3]{p}$, donde p es la potencia del auto (en caballos de fuerza). Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función. Estima la potencia de un automóvil de 1600 kilogramos que alcanza una velocidad de 220 kilómetros por hora. *(Consulta el Ejemplo 5).*

38. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS El radio r de una esfera se da a través de la función $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$, donde V es el volumen de la esfera. Usa una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la función. Estima el volumen de una pelota de playa esférica con un radio de 13 pulgadas.

39. ARGUMENTAR Tu amigo dice que todas las funciones de raíz cúbica son funciones impares. ¿Tiene razón tu amigo? Explica.

40. ¿CÓMO LO VES? La gráfica representa la función de raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$.



a. ¿En qué intervalo f es negativo? ¿Positivo?

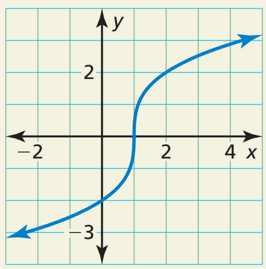
b. ¿En qué intervalo, de haber uno, f disminuye? ¿Aumenta?

c. ¿f tiene un valor máximo o un valor mínimo? Explica.

d. Halla la tasa de cambio promedio de f en el intervalo $x = -1$ a $x = 1$.

41. RESOLVER PROBLEMAS Escribe una función de raíz cúbica que pase a través del punto (3, 4) y que tenga una tasa de cambio promedio de -1 en el intervalo $x = -5$ a $x = 2$.

42. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Escribe una función de raíz cúbica representada por la gráfica. Usa una calculadora gráfica para verificar tu respuesta.



Mantener el dominio de las matemáticas
Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Factoriza el polinomio. *(Sección 7.6)*

43. $3x^2 + 12x - 36$ **44.** $2x^2 - 11x + 9$ **45.** $4x^2 + 7x - 15$

Resuelve la ecuación usando raíces cuadradas. *(Sección 9.3)*

46. $x^2 - 36 = 0$ **47.** $5x^2 + 20 = 0$ **48.** $(x + 4)^2 = 81$ **49.** $25(x - 2)^2 = 9$

10.1–10.2 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

función de raíz cuadrada, *pág. 544*
función radical, *pág. 545*
función de raíz cúbica, *pág. 552*

Conceptos Esenciales

Sección 10.1

Funciones de raíz cuadrada, *pág. 544*
Transformaciones de las funciones de raíz cuadrada, *pág. 545*
Comparar las funciones de raíz cuadrada usando las tasas de cambio promedio, *pág. 546*

Sección 10.2

Funciones de raíz cúbica, *pág. 552*
Comparar las funciones de raíz cúbica usando las tasas de cambio promedio, *pág. 554*

Prácticas matemáticas

1. En el Ejercicio 45 de la página 549, ¿qué información te dan? ¿Qué relaciones están presentes? ¿Cuál es tu objetivo?

2. ¿Qué unidades de medida usaste en tu respuesta al Ejercicio 38 de la página 556? Explica tu razonamiento.

Destrezas de estudio

Hacer tarjetas para notas

Invierte en tres colores diferentes de tarjetas para notas. Usa un color para cada uno de los siguientes: palabras de vocabulario, reglas y pulsaciones de la calculadora.

- Usando el primer color de las tarjetas para notas, escribe una palabra de vocabulario de un lado de la tarjeta. Del otro lado, escribe la definición y un ejemplo. Si es posible, escribe la definición en tus propias palabras.
- Usando el segundo color de las tarjetas de notas, escribe una regla de uno de los lados. Del otro lado, escribe una explicación y un ejemplo.
- Usando el tercer color de las tarjetas para notas, escribe un cálculo de un lado. Del otro lado, escribe las pulsaciones requeridas para efectuar el cálculo.

Usa las tarjetas para notas como referencia al hacer la tarea. Pruébate a ti mismo una vez al día.

10.1–10.2 Prueba

Describe el dominio de la función. *(Sección 10.1)*

1. $y = \sqrt{x - 3}$ **2.** $f(x) = 15\sqrt{x}$ **3.** $y = \sqrt{3 - x}$

Haz una gráfica de la función. Describe el rango. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$. *(Sección 10.1)*

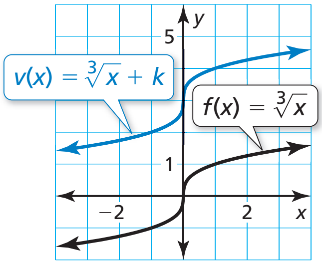
4. $g(x) = \sqrt{x} + 5$ **5.** $n(x) = \sqrt{x - 4}$ **6.** $r(x) = -\sqrt{x - 2} + 1$

Haz una gráfica de la función. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$. *(Sección 10.2)*

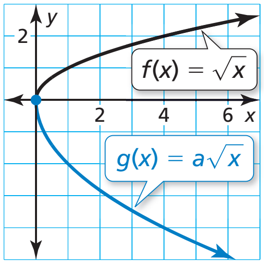
7. $b(x) = \sqrt[3]{x + 2}$ **8.** $h(x) = -3\sqrt[3]{x} - 6$ **9.** $q(x) = \sqrt[3]{-4 - x}$

Compara las gráficas. Halla el valor de h, k, o a. *(Sección 10.1 y Sección 10.2)*

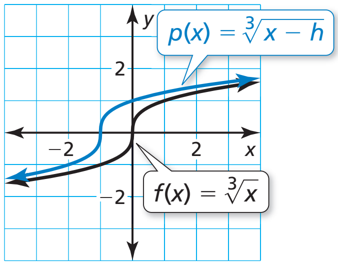
10.



11.



12.



Describe las transformaciones a partir de la gráfica de f a la gráfica de h. Luego, haz una gráfica de h. *(Sección 10.1 y Sección 10.2)*

13. $f(x) = \sqrt{x}$; $h(x) = -3\sqrt{x + 2} + 6$ **14.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} - 3$

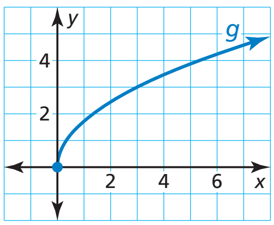
15. El tiempo t (en segundos) que le lleva a un objeto caer h pies se da mediante $t = \frac{1}{4}\sqrt{h}$. *(Sección 10.1)*

a. Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función. Describe el dominio y el rango.

b. A una piedra que cae desde el puente New River George en West Virginia le lleva 7.4 segundos llegar al agua. ¿Qué altura aproximada tiene el puente por encima del New River?

16. El radio r de una esfera se da mediante la función $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$, donde V es el volumen de la esfera. Spaceship Earth es una estructura esférica que se encuentra en Walt Disney World, que tiene un radio interno de 25 metros aproximadamente. Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función. Estima el volumen del Spaceship Earth. *(Sección 10.2)*

17. Se muestra la gráfica de la función de raíz cuadrada g. Compara la tasa de cambio promedio de g con la tasa de cambio promedio de $h(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x}$ en el intervalo $x = 0$ a $x = 3$. *(Sección 10.1 y Sección 10.2)*



10.3 Resolver ecuaciones radicales

Pregunta esencial ¿Cómo puedes resolver una ecuación que contiene raíces cuadradas?

EXPLORACIÓN 1 Analizar un objeto en caída libre

Trabaja con un compañero. La tabla muestra el tiempo t (en segundos) que le lleva a un objeto en caída libre (sin resistencia de aire) caer d pies.

d (pies)	t (segundo)
0	0.00
32	1.41
64	2.00
96	2.45
128	2.83
160	3.16
192	3.46
224	3.74
256	4.00
288	4.24
320	4.47

REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS

Para dominar las matemáticas, necesitas interpretar en forma rutinaria tus resultados matemáticos en el contexto de la situación y reflejar si los resultados tienen sentido.

a. Usa los datos en la tabla para dibujar la gráfica de t como una función de d. Usa el siguiente plano de coordenadas.

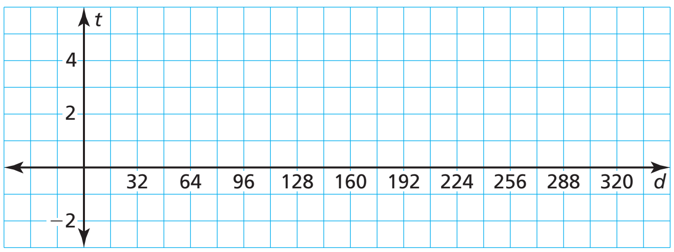
b. Usa tu gráfica para estimar el tiempo que le lleva al objeto caer 240 pies.

c. La relación entre d y t se da mediante la función

$$t = \sqrt{\frac{d}{16}}.$$

Usa esta función para verificar tu estimación de la parte (b),

d. Al objeto le lleva 5 segundos llegar al suelo. ¿Qué tan lejos cayó? Explica tu razonamiento.



EXPLORACIÓN 2 Resolver una ecuación de raíz cuadrada

Trabaja con un compañero. La velocidad s (en pies por segundo) del objeto en caída libre de la Exploración 1 está dada mediante la función

$$s = \sqrt{64d}.$$

Halla la distancia que el objeto cayó al alcanzar cada velocidad.

a. $s = 8$ pies/s **b.** $s = 16$ pies/s **c.** $s = 24$ pies/s

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes resolver una ecuación que contiene raíces cuadradas?

4. Usa tu respuesta de la Pregunta 3 para resolver cada ecuación.

a. $5 = \sqrt{x + 20}$ **b.** $4 = \sqrt{x - 18}$

c. $\sqrt{x} + 2 = 3$ **d.** $-3 = -2\sqrt{x}$

10.3 Lección

Qué aprenderás

- Resolver ecuaciones radicales.
- Identificar soluciones extrañas.
- Resolver problemas de la vida real incluyendo ecuaciones radicales.

Vocabulario Esencial

ecuación radical, *pág. 560*

Anterior

radical

expresión radical

solución extraña

Resolver ecuaciones radicales

Una **ecuación radical** es una ecuación que contiene una expresión radical con una variable en el radicando. Para resolver una ecuación radical incluyendo una raíz cuadrada, primero usa propiedades de igualdad para aislar al radical de un lado de la ecuación. Luego usa la siguiente propiedad para eliminar al radical y resuelve para hallar la variable.

Concepto Esencial

Elevar al cuadrado cada lado de una ecuación

Palabras Si dos expresiones son iguales, sus cuadrados también son iguales.

Álgebra Si $a = b$, $a^2 = b^2$.

EJEMPLO 1 **Resolver ecuaciones radicales**

Resuelve cada ecuación.

a. $\sqrt{x} + 5 = 13$ **b.** $3 - \sqrt{x} = 0$

SOLUCIÓN

a. $\sqrt{x} + 5 = 13$ Escribe la ecuación.

$\sqrt{x} = 8$ Resta 5 de cada lado.

$(\sqrt{x})^2 = 8^2$ Eleva al cuadrado cada lado de la ecuación.

$x = 64$ Simplifica.

▶ La solución es $x = 64$.

Verifica

$$\sqrt{x} + 5 = 13$$
$$\sqrt{64} + 5 \stackrel{?}{=} 13$$
$$8 + 5 \stackrel{?}{=} 13$$
$$13 = 13 \checkmark$$

b. $3 - \sqrt{x} = 0$ Escribe la ecuación.

$3 = \sqrt{x}$ Suma $\sqrt{x}$ a cada lado.

$3^2 = (\sqrt{x})^2$ Eleva al cuadrado cada lado de la ecuación.

$9 = x$ Simplifica.

▶ La solución es $x = 9$.

Verifica

$$3 - \sqrt{x} = 0$$
$$3 - \sqrt{9} \stackrel{?}{=} 0$$
$$3 - 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación. Verifica tu solución.

1. $\sqrt{x} = 6$

2. $\sqrt{x} - 7 = 3$

3. $\sqrt{y} + 15 = 22$

4. $1 - \sqrt{c} = -2$

EJEMPLO 2 Resolver una ecuación radical

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x+2} + 3 &= 19 && \text{Ecuación original.} \\ 4\sqrt{x+2} &= 16 && \text{Resta 3 de cada lado.} \\ \sqrt{x+2} &= 4 && \text{Divide cada lado entre 4.} \\ \left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= 4^2 && \text{Eleva al cuadrado cada lado de la ecuación.} \\ x + 2 &= 16 && \text{Simplifica.} \\ x &= 14 && \text{Resta 2 de cada lado.} \end{aligned}$$

▶ La solución es $x = 14$.

Verifica

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x+2} + 3 &= 19 \\ 4\sqrt{14+2} + 3 &\stackrel{?}{=} 19 \\ 4\sqrt{16} + 3 &\stackrel{?}{=} 19 \\ 4(4) + 3 &\stackrel{?}{=} 19 \\ 19 &= 19 \ ✓ \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Resolver una ecuación con radicales en ambos lados

Resuelve $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+4}$.

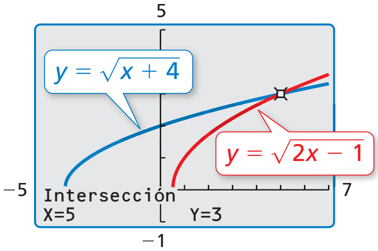
SOLUCIÓN

Método 1

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-1} &= \sqrt{x+4} && \text{Escribe la ecuación.} \\ \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 &= \left(\sqrt{x+4}\right)^2 && \text{Eleva al cuadrado cada lado de la ecuación.} \\ 2x - 1 &= x + 4 && \text{Simplifica.} \\ x &= 5 && \text{Resuelve para hallar } x. \end{aligned}$$

▶ La solución es $x = 5$.

Método 2 Haz una gráfica de cada lado de la ecuación, como se muestra. Usa la función *intersección* para hallar las coordenadas del punto de intersección. El valor x del punto de intersección es 5.



▶ Por lo tanto, la solución es $x = 5$.

EJEMPLO 4 Resolver una ecuación radical que incluya una raíz cúbica

Resuelve $\sqrt[3]{5x-2} = 12$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5x-2} &= 12 && \text{Escribe la ecuación.} \\ \left(\sqrt[3]{5x-2}\right)^3 &= 12^3 && \text{Eleva al cubo cada lado de la ecuación.} \\ 5x - 2 &= 1728 && \text{Simplifica.} \\ x &= 346 && \text{Resuelve para hallar } x. \end{aligned}$$

▶ La solución es $x = 346$.

BUSCAR UNA ESTRUCTURA

Puedes extender el concepto enseñado en los Ejemplos 1 a 3 para resolver una ecuación radical incluyendo una raíz cúbica. En lugar de elevar al cuadrado cada lado de la ecuación, elevarás al cubo cada lado para eliminar el radical.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación. Verifica tu solución.

5. $\sqrt{x+4} + 7 = 11$ **6.** $15 = 6 + \sqrt{3w-9}$ **7.** $\sqrt{3x+1} = \sqrt{4x-7}$

8. $\sqrt{n} = \sqrt{5n-1}$ **9.** $\sqrt[3]{y} - 4 = 1$ **10.** $\sqrt[3]{3c+7} = 10$

PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN

Para entender cómo se puede introducir soluciones extrañas, considera la ecuación $\sqrt{x} = -2$. Esta ecuación no tiene una solución real, sin embargo, obtienes $x = 4$ después de elevar al cuadrado cada lado.

Identificar soluciones extrañas

Elevar al cuadrado cada lado de una ecuación puede, algunas veces, introducir una solución extraña.

EJEMPLO 5 Identificar una solución extraña

Resuelve $x = \sqrt{x + 6}$.

SOLUCIÓN

$x = \sqrt{x+6}$	Escribe la ecuación.
$x^2 = (\sqrt{x+6})^2$	Eleva al cuadrado cada lado de la ecuación.
$x^2 = x + 6$	Simplifica.
$x^2 - x - 6 = 0$	Resta x y 6 de cada lado.
$(x - 3)(x + 2) = 0$	Factoriza.
$x - 3 = 0$ o $x + 2 = 0$	Propiedad del producto cero
$x = 3$ o $x = -2$	Resuelve para hallar x.

CONSEJO DE ESTUDIO

Asegúrate de sustituir siempre tus soluciones en la ecuación original para verificar si hay soluciones extrañas.

Verifica Verifica cada solución en la ecuación original.

$3 \stackrel{?}{=} \sqrt{3+6}$	Sustituye por x.	$-2 \stackrel{?}{=} \sqrt{-2+6}$
$3 \stackrel{?}{=} \sqrt{9}$	Simplifica.	$-2 \stackrel{?}{=} \sqrt{4}$
$3 = 3$ ✓	Simplifica.	$-2 \neq 2$ ✗

▶ Dado que $x = -2$ no satisface la ecuación original, es una solución extraña. La única solución es $x = 3$.

EJEMPLO 6 Identificar una solución extraña

Resuelve $13 + \sqrt{5n} = 3$.

SOLUCIÓN

$13 + \sqrt{5n} = 3$	Escribe la ecuación.
$\sqrt{5n} = -10$	Resta 13 de cada lado.
$(\sqrt{5n})^2 = (-10)^2$	Eleva al cuadrado cada lado de la ecuación.
$5n = 100$	Simplifica.
$n = 20$	Divide cada lado entre 5.

Verifica

$$13 + \sqrt{5n} = 3$$
$$13 + \sqrt{5(20)} \stackrel{?}{=} 3$$
$$13 + \sqrt{100} \stackrel{?}{=} 3$$
$$23 \neq 3 \ ✗$$

▶ Dado que $n = 20$ no satisface a la ecuación original, es una solución extraña. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución.

Monitoreo del progreso Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve la ecuación. Verifica tu(s) solución(es).

11. $\sqrt{4 - 3x} = x$ **12.** $\sqrt{3m} + 10 = 1$ **13.** $p + 1 = \sqrt{7p + 15}$

Resolver problemas de la vida real

EJEMPLO 7 **Representar con matemáticas**

CONSEJO DE ESTUDIO
El periodo de un péndulo es la cantidad de tiempo que le lleva balancearse hacia atrás y hacia adelante.

El período P (en segundos) de un péndulo se da mediante la función $P = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$, donde L es la longitud del péndulo (en pies). Un péndulo tiene un periodo de 4 segundos. ¿Este péndulo es el doble de largo que un péndulo con un periodo de 2 segundos? Explica tu razonamiento.

SOLUCIÓN

1. **Comprende el problema** Te dan una función que representa el periodo P de un péndulo en base a su longitud L. Necesitas hallar y comparar los valores de L para dos valores de P.

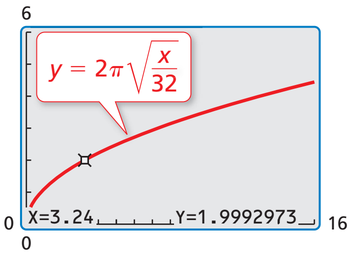
2. **Haz un plan** Sustituye $P = 2$ y $P = 4$ en la función y resuelve para hallar L. Luego compara los valores.

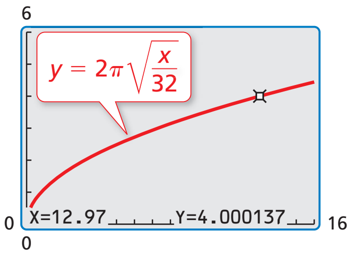
3. **Resuelve el problema**

$P = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$	Escribe la función.	$P = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$
$2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$	Sustituye por P.	$4 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$
$\frac{2}{2\pi} = \sqrt{\frac{L}{32}}$	Divide cada lado por 2π.	$\frac{4}{2\pi} = \sqrt{\frac{L}{32}}$
$\frac{1}{\pi} = \sqrt{\frac{L}{32}}$	Simplifica.	$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{L}{32}}$
$\frac{1}{\pi^2} = \frac{L}{32}$	Eleva al cuadrado cada lado y simplifica.	$\frac{4}{\pi^2} = \frac{L}{32}$
$\frac{32}{\pi^2} = L$	Multiplica cada lado por 32.	$\frac{128}{\pi^2} = L$
$3.24 \approx L$	Usa una calculadora.	$12.97 \approx L$

No, la longitud del péndulo con un periodo de 4 segundos es $\frac{128}{\pi^2} \div \frac{32}{\pi^2} = 4$ veces más largo que la longitud de un péndulo con un periodo de 2 segundos.

4. **Verifícalo** Usa la función *trazar* de una calculadora gráfica para verificar tus soluciones.





Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

14. ¿Cuál es la longitud de un péndulo que tiene un periodo de 2.5 segundos?

10.3 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **VOCABULARIO** ¿Por qué debes verificar cada solución de una ecuación radical?

2. **¿CUÁL NO CORRESPONDE?** ¿Cuál de las siguientes ecuaciones no corresponde al grupo de las otras tres? Explica tu razonamiento.

$\sqrt{x} + 6 = 10$	$2\sqrt{x+3} = 32$	$x\sqrt{3} - 5 = 4$	$\sqrt{x-1} = 16$

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

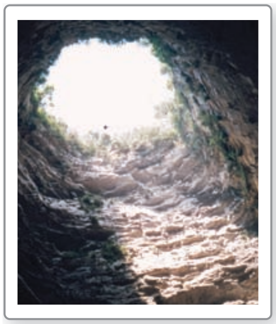
En los Ejercicios 3–12, resuelve la ecuación. Verifica tu solución. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $\sqrt{x} = 9$
4. $\sqrt{y} = 4$
5. $7 = \sqrt{m} - 5$
6. $\sqrt{p} - 7 = -1$
7. $\sqrt{c} + 12 = 23$
8. $\sqrt{x} + 6 = 8$
9. $4 - \sqrt{a} = 2$
10. $-8 = 7 - \sqrt{r}$
11. $3\sqrt{y} - 18 = -3$
12. $2\sqrt{q} + 5 = 11$

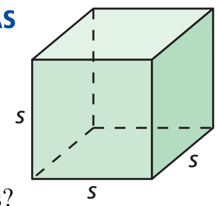
En los Ejercicios 13–20, resuelve la ecuación. Verifica tu solución. *(Consulta el Ejemplo 2).*

13. $\sqrt{a-3} + 5 = 9$
14. $\sqrt{b+7} - 5 = -2$
15. $2\sqrt{x+4} = 16$
16. $5\sqrt{y-2} = 10$
17. $-1 = \sqrt{5r+1} - 7$
18. $2 = \sqrt{4s-4} - 4$
19. $7 + 3\sqrt{3p-9} = 25$
20. $19 - 4\sqrt{3c-11} = 11$

21. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** El Sótano de las Golondrinas es una cueva natural abierta en el estado de San Luis Potosí, México. La cueva de 1220 pies de profundidad fue un destino popular para los saltadores de BASE. La función $t = \frac{1}{4}\sqrt{d}$ representa el tiempo t (en segundos) que le lleva a un saltador de BASE caer d pies. ¿Cuánto cae un saltador de BASE en 3 segundos?

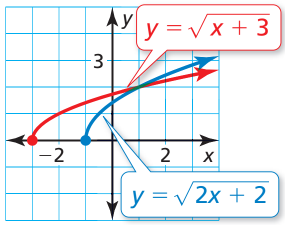


22. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** La longitud s del borde de un cubo con un área de superficie de A está dada mediante $s = \sqrt{\frac{A}{6}}$. ¿Cuál es el área de superficie de un cubo con una longitud de borde de 4 pulgadas?

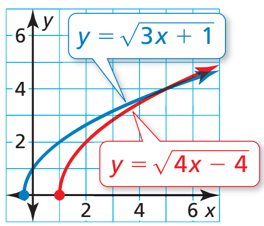


En los Ejercicios 23–26, usa la gráfica para resolver la ecuación.

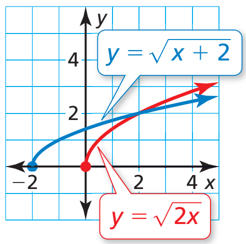
23. $\sqrt{2x+2} = \sqrt{x+3}$



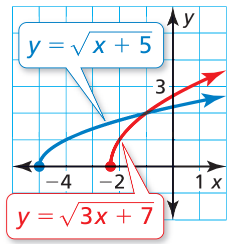
24. $\sqrt{3x+1} = \sqrt{4x-4}$



25. $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x} = 0$



26. $\sqrt{x+5} - \sqrt{3x+7} = 0$

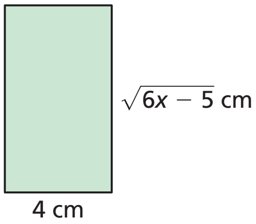


En los Ejercicios 27–34, resuelve la ecuación. Verifica tu solución. *(Consulta el Ejemplo 3).*

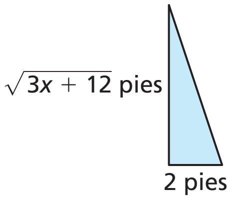
27. $\sqrt{2x-9} = \sqrt{x}$
28. $\sqrt{y+1} = \sqrt{4y-8}$
29. $\sqrt{3g+1} = \sqrt{7g-19}$
30. $\sqrt{8h-7} = \sqrt{6h+7}$
31. $\sqrt{\frac{p}{2} - 2} = \sqrt{p-8}$
32. $\sqrt{2v-5} = \sqrt{\frac{v}{3} + 5}$
33. $\sqrt{2c+1} - \sqrt{4c} = 0$
34. $\sqrt{5r} - \sqrt{8r-2} = 0$

CONEXIONES MATEMÁTICAS **En los Ejercicios 35 y 36, halla el valor de x.**

35. Perímetro $= 22$ cm



36. Area $= \sqrt{5x - 4}$ pies^2



En los Ejercicios 37–44, resuelve la ecuación. Verifica tu solución. *(Consulta el Ejemplo 4).*

37. $\sqrt[3]{x} = 4$

38. $\sqrt[3]{y} = 2$

39. $6 = \sqrt[3]{8g}$

40. $\sqrt[3]{r + 19} = 3$

41. $\sqrt[3]{2s + 9} = -3$

42. $-5 = \sqrt[3]{10x + 15}$

43. $\sqrt[3]{y + 6} = \sqrt[3]{5y - 2}$

44. $\sqrt[3]{7j - 2} = \sqrt[3]{j + 4}$

En los Ejercicios 45–48, determina cuál solución, si la hay, es una solución extraña.

45. $\sqrt{6x - 5} = x$; $x = 5$, $x = 1$

46. $\sqrt{2y + 3} = y$; $y = -1$, $y = 3$

47. $\sqrt{12p + 16} = -2p$; $p = -1$, $p = 4$

48. $-3g = \sqrt{-18 - 27g}$; $g = -2$, $g = -1$

En los Ejercicios 49–58, resuelve la ecuación. Verifica tu(s) solución(es). *(Consulta los Ejemplos 5 y 6).*

49. $y = \sqrt{5y - 4}$

50. $\sqrt{-14 - 9x} = x$

51. $\sqrt{1 - 3a} = 2a$

52. $2q = \sqrt{10q - 6}$

53. $9 + \sqrt{5p} = 4$

54. $\sqrt{3n} - 11 = -5$

55. $\sqrt{2m + 2} - 3 = 1$

56. $15 + \sqrt{4b - 8} = 13$

57. $r + 4 = \sqrt{-4r - 19}$

58. $\sqrt{3 - s} = s - 1$

ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 59 y 60, describe y corrige el error cometido al resolver la ecuación.**

59.

$$2 + 5\sqrt{x} = 12$$
$$5\sqrt{x} = 10$$
$$5x = 100$$
$$x = 20$$

60.

$$x = \sqrt{12 - 4x}$$
$$x^2 = 12 - 4x$$
$$x^2 + 4x - 12 = 0$$
$$(x - 2)(x + 6) = 0$$
$$x = 2 \quad o \quad x = -6$$

Las soluciones son $x = 2$ y $x = -6$.

61. RAZONAR Explica cómo usar cálculos mentales para resolver $\sqrt{2x} + 5 = 1$.

62. ESCRIBIR Explica cómo resolverías $\sqrt[4]{m + 4} - \sqrt[4]{3m} = 0$.

63. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS La fórmula $V = \sqrt{PR}$ relaciona el voltaje V (en voltios), la potencia P (en vatios) y la resistencia R (en ohms) de un circuito eléctrico. El secador de pelo que se muestra se encuentra en un circuito de 120 voltios. ¿La resistencia del secador de pelo es la mitad de la resistencia del mismo secador de pelo en un circuito de 240 voltios? Explica tu razonamiento. *(Consulta el Ejemplo 7).*

64. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS El tiempo t (en segundos) que le lleva a un trapecista balancearse hacia atrás y hacia adelante se representa mediante la función $t = 2\pi\sqrt{\frac{r}{32}}$, donde r es la longitud de la soga (en pies). Al trapecista le lleva 6 segundos balancearse hacia atrás y hacia adelante. ¿Esta soga es $\frac{3}{2}$ tan larga como la soga usada cuando al trapecista le llevó 4 segundos balancearse hacia atrás y hacia adelante? Explica tu razonamiento.

RAZONAR **En los Ejercicios 65–68, determina si el enunciado es *verdadero* o *falso*. Si es falso, explica por qué.**

65. Si $\sqrt{a} = b$, entonces $(\sqrt{a})^2 = b^2$.

66. Si $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, entonces $a = b$.

67. Si $a^2 = b^2$, entonces $a = b$.

68. Si $a^2 = \sqrt{b}$, entonces $a^4 = (\sqrt{b})^2$.

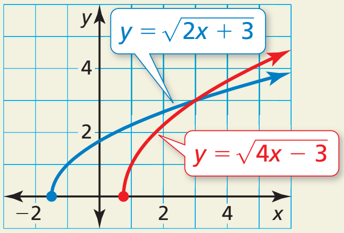
69. COMPARAR MÉTODOS Considera la ecuación $x + 2 = \sqrt{2x - 3}$.

a. Resuelve la ecuación mediante gráficas. Describe el proceso.

b. Resuelve la ecuación algebraicamente. Describe el proceso.

c. ¿Cuál método prefieres? Explica tu razonamiento.

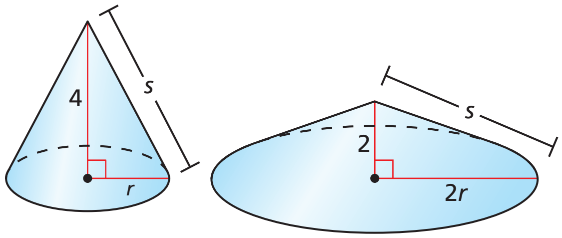
70. ¿CÓMO LO VES? La gráfica muestra dos funciones radicales.



a. Escribe una ecuación cuya solución es la coordenada x del punto de intersección de las gráficas.

b. Usa la gráfica para resolver la ecuación.

71. CONEXIONES MATEMÁTICAS La altura inclinada s de un cono con un radio de r y una altura de h está dada mediante $s = \sqrt{r^2 + h^2}$. La altura inclinada de los dos conos es la misma. Halla el radio de cada cono.



72. PENSAMIENTO CRÍTICO ¿De qué modo elevar al cuadrado $\sqrt{x + 2}$ es diferente de elevar al cuadrado $\sqrt{x} + 2$?

USAR LA ESTRUCTURA En los Ejercicios 73–78, resuelve la ecuación. Verifica tu solución.

73. $\sqrt{m + 15} = \sqrt{m} + \sqrt{5}$

74. $2 - \sqrt{x + 1} = \sqrt{x + 2}$

75. $\sqrt{5y + 9} + \sqrt{5y} = 9$

76. $\sqrt{2c - 8} - \sqrt{2c} - 4 = 0$

77. $2\sqrt{1 + 4h} - 4\sqrt{h} - 2 = 0$

78. $\sqrt{20 - 4z} + 2\sqrt{-z} = 10$

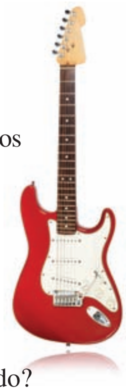
79. FINAL ABIERTO Escribe una ecuación radical que tenga una solución de $x = 5$.

80. FINAL ABIERTO Escribe una ecuación radical que tenga $x = 3$ y $x = 4$ como soluciones.

81. ARGUMENTAR Tu amigo dice que la ecuación $\sqrt{(2x + 5)^2} = 2x + 5$ siempre es verdadera, porque después de simplificar el lado izquierdo de la ecuación, el resultado es una ecuación con infinitas soluciones. ¿Tiene razón tu amigo? Explica.

82. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Resuelve la ecuación $\sqrt[3]{x + 1} = \sqrt{x - 3}$. Muestra tu trabajo y explica tus pasos.

83. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS La frecuencia f (en ciclos por segundo) de la cuerda de una guitarra eléctrica está dada mediante la ecuación $f = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$, donde ℓ es la longitud de la cuerda (en metros), T es la tensión de la cuerda (en néwtones) y m es la masa de la cuerda por unidad de longitud (en kilogramos por metro). La cuerda alta E de una guitarra eléctrica es de 0.64 metros de largo con una masa por unidad de longitud de 0.000401 kilogramo por metro.



a. ¿Cuánta tensión es necesaria para producir una frecuencia de aproximadamente 330 ciclos por segundo?

b. ¿Necesitarías más o menos tensión para crear la misma frecuencia en una cuerda con una mayor masa por unidad de longitud? Explica.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla el producto. *(Sección 7.2)*

84. $(x + 8)(x - 2)$

85. $(3p - 1)(4p + 5)$

86. $(s + 2)(s^2 + 3s - 4)$

Haz una gráfica de la función. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = x^2$. *(Sección 8.1)*

87. $r(x) = 3x^2$

88. $g(x) = \frac{3}{4}x^2$

89. $h(x) = -5x^2$

10.4 Inverso de una función

Pregunta esencial ¿De qué modo se relacionan una función y su función inversa?

EXPLORACIÓN 1 **Explorar funciones inversas**

Trabaja con un compañero. Las funciones f y g son *inversas* entre sí. Compara las tablas de valores de las dos funciones. ¿Cómo se relacionan las funciones?

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$f(x)$	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25

x	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25
$g(x)$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5

EXPLORACIÓN 2 **Explorar funciones inversas**

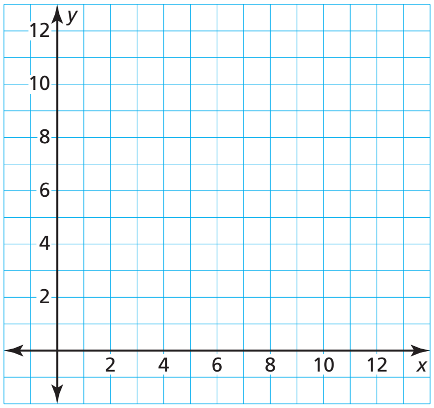
Trabaja con un compañero.

a. Marca los dos conjuntos de puntos representados por las tablas en la Exploración 1. Usa el siguiente plano de coordenadas.

b. Conecta cada conjunto de puntos con una curva suave.

c. Describe la relación entre las dos gráficas.

d. Escribe una ecuación para cada función.



Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo se relacionan una función y su función inversa?

4. Se da una tabla de valores para una función f. Crea una tabla de valores para una función g, la inversa de f.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8

PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN

Para dominar las matemáticas, necesitas comunicarte con otros de manera precisa.

5. Dibuja las gráficas de $f(x) = x + 4$ y su inversa en el mismo plano de coordenadas. Luego, escribe una ecuación de la inversa de f. Explica tu razonamiento.

10.4 Lección

Vocabulario Esencial

relación inversa, *pág. 568*
function inversa, *pág. 569*

Anterior
entrada
salida
operaciones inversas
reflexión
eje de reflexión

Qué aprenderás

- Hallar inversos de relaciones.
- Explorar inversos de funciones.
- Hallar inversos de funciones algebraicas.
- Hallar inversos de funciones no lineales.

Hallar inversos de relaciones

Recuerda que una relación agrupa entradas con salidas. Una **relación inversa** cambia los valores de entrada y salida de la relación original.

Concepto Esencial

Relación inversa

Cuando una relación contiene (a, b), la relación inversa contiene (b, a).

EJEMPLO 1 Hallar inversos de relaciones

Halla el inverso de cada relación.

a. $(-4, 7), (-2, 4), (0, 1), (2, -2), (4, -5)$ Cambia las coordenadas de cada par ordenado.

$(7, -4), (4, -2), (1, 0), (-2, 2), (-5, 4)$ Relación inversa

b.

Entrada	−1	0	1	2	3	4
Salida	5	10	15	20	25	30

Relación inversa:

Entrada	5	10	15	20	25	30
Salida	−1	0	1	2	3	4

Cambia las entradas y salidas.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla el inverso de la relación.

1. $(-3, -4), (-2, 0), (-1, 4), (0, 8), (1, 12), (2, 16), (3, 20)$

2.

Entrada	−2	−1	0	1	2
Salida	4	1	0	1	4

Explorar inversos de funciones

A lo largo de todo este libro, has usado entradas provistas para hallar las salidas correspondientes de $y = f(x)$ para diversos tipos de funciones. También has usado salidas provistas para hallar las entradas correspondientes. Ahora resolverás ecuaciones de la forma $y = f(x)$ para x de manera de obtener una fórmula para hallar la entrada, dada la salida específica de la función f.

EJEMPLO 2 Escribir una fórmula para la entrada de una función

Imagina que $f(x) = 2x + 1$. Resuelve $y = f(x)$ para hallar x. Luego, halla la entrada cuando la salida es -3.

SOLUCIÓN

$$y = 2x + 1 \qquad \text{Coloca } y \text{ igual a } f(x).$$

$$y - 1 = 2x \qquad \text{Resta 1 de cada lado.}$$

$$\frac{y-1}{2} = x \qquad \text{Divide cada lado entre 2.}$$

Halla la entrada cuando $y = -3$.

$$x = \frac{-3 - 1}{2} \qquad \text{Sustituye } -3 \text{ por } y.$$

$$= \frac{-4}{2} \qquad \text{Resta.}$$

$$= -2 \qquad \text{Divide.}$$

Verifica

$f(-2) = 2(-2) + 1$

$= -4 + 1$

$= -3$ ✓

▶ Por lo tanto, la entrada es -2 cuando la salida es -3.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Resuelve $y = f(x)$ para hallar x. Luego, halla la entrada cuando la salida es 4 .

3. $f(x) = x - 6$ **4.** $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ **5.** $f(x) = 4x^2$

COMPRENDER LOS TÉRMINOS MATEMÁTICOS

El término *funciones inversas* no se refiere a un nuevo tipo de función. En su lugar, describe a cualquier par de funciones que son inversas.

En el Ejemplo 2, observa los pasos incluidos después de sustituir por x en $y = 2x + 1$ y después de sustituir por y en $x = \frac{y-1}{2}$.

$y = 2x + 1$ $\qquad$ $x = \frac{y-1}{2}$

Paso 1 Multiplica por 2 → **Paso 2** Divide entre 2.

Paso 2 Suma 1. → **Paso 1** Resta 1.

operaciones inversas en el orden reverso

Observa que estos pasos se *cancelan* entre sí. Las **funciones inversas** son funciones que se cancelan entre si. En el Ejemplo 2, puedes usar la ecuación resuelta para hallar x para escribir la inversa de f cambiando los roles de x y y.

$f(x) = 2x + 1$ función original $\qquad$ $g(x) = \frac{x-1}{2}$ función inversa

Dado que una función inversa intercambia los valores de entrada y de salida de la función original, el dominio y el rango también se intercambian.

BUSCAR UN PATRÓN

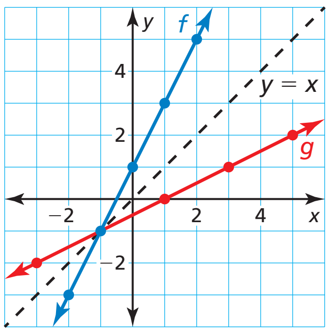
Observa que la gráfica de la función inversa g es una reflexión de la gráfica de la función original f. La línea de reflexión es $y = x$.

Función original: $f(x) = 2x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5

Función inversa: $g(x) = \frac{x-1}{2}$

x	-3	-1	1	3	5
y	-2	-1	0	1	2



Hallar inversos de funciones algebraicas

Concepto Esencial

Hallar inversos de funciones algebraicas

Paso 1 Coloca y igual a $f(x)$.

Paso 2 Cambia x y y en la ecuación.

Paso 3 Resuelve la ecuación para hallar y.

CONSEJO DE ESTUDIO

En la página anterior, resolviste una función para hallar x y cambiaste los roles de x y y para hallar la función inversa. También puedes hallar la función inversa cambiando x y y primero y luego resolviendo para hallar y.

EJEMPLO 3 Hallar el inverso de una función lineal

Halla el inverso de $f(x) = 4x - 9$.

SOLUCIÓN

Método 1 Usa el método anterior.

Paso 1 $f(x) = 4x - 9$ Escribe la ecuación.

$y = 4x - 9$ Coloca y igual a $f(x)$.

Paso 2 $x = 4y - 9$ Cambia x y y en la ecuación.

Paso 3 $x + 9 = 4y$ Suma 9 a cada lado.

$\frac{x+9}{4} = y$ Divide cada lado entre 4.

▶ El inverso de f es $g(x) = \frac{x+9}{4}$ o $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$.

Método 2 Usa operaciones inversas en el orden reverso.

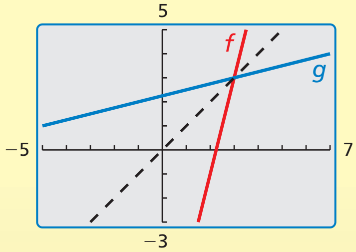
$f(x) = 4x - 9$ Multiplica la entrada x por 4 y luego resta 9.

Para hallar el inverso, aplica operaciones inversas en el orden reverso.

$g(x) = \frac{x+9}{4}$ Suma 9 a la entrada x y luego divide entre 4.

▶ El inverso de f es $g(x) = \frac{x+9}{4}$ o $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$.

Verifica



La gráfica de g aparenta ser una reflexión de la gráfica de f en la línea $y = x$. ✓

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

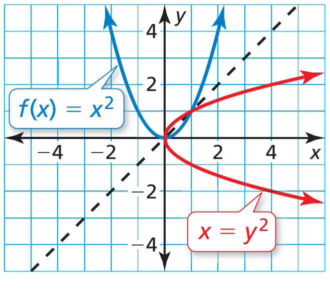
Halla el inverso de la función. Luego haz una gráfica de la función y su inverso.

6. $f(x) = 6x$

7. $f(x) = -x + 5$

8. $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$

Hallar inversos de funciones no lineales

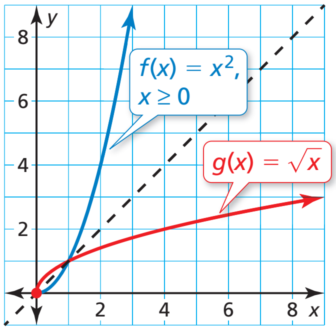


El inverso de la función lineal en el Ejemplo 3 también es una función. El inverso de una función, sin embargo, *no* siempre es una función. La gráfica de $f(x) = x^2$ se muestra junto con su reflexión en la línea $y = x$. Observa que la gráfica del inverso de $f(x) = x^2$ no pasa la Prueba de línea vertical. Por lo tanto, el inverso *no* es una función.

Cuando el dominio de $f(x) = x^2$ está *restringido* solo a números reales no negativos, el inverso de f es una función, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Hallar el inverso de una función cuadrática

Halla el inverso de $f(x) = x^2$, $x \geq 0$. Luego, haz una gráfica de la función y de su inverso.



SOLUCIÓN

$f(x) = x^2$ — Escribe la ecuación.

$y = x^2$ — Coloca y igual a $f(x)$.

$x = y^2$ — Cambia x y y en la ecuación.

$\pm\sqrt{x} = y$ — Saca la raíz cuadrada de cada lado.

▶ Dado que el dominio de f está restringido a valores no negativos de x, el rango del inverso también debe estar restringido a valores no negativos. Por lo tanto, el inverso de f es $g(x) = \sqrt{x}$.

Puedes usar la gráfica de una función f para determinar si el inverso de f es una función aplicando la *Prueba de línea horizontal*.

Concepto Esencial

Prueba de la línea horizontal

El inverso de una función f también es una función solo si ninguna línea horizontal cruza la gráfica de f más de una vez.

EJEMPLO 5 Hallar el inverso de una función radical

Considera la función $f(x) = \sqrt{x + 2}$. Determina si el inverso de f es una función. Luego, halla el inverso.

SOLUCIÓN

Haz una gráfica de la función f. Dado que ninguna línea horizontal cruza la gráfica más de una vez, el inverso de f es una función. Halla el inverso.

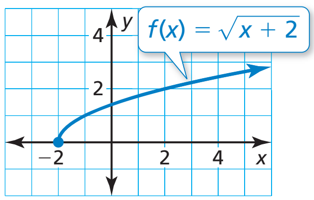
$y = \sqrt{x + 2}$ — Coloca y igual a $f(x)$.

$x = \sqrt{y + 2}$ — Cambia x y y en la ecuación.

$x^2 = \left(\sqrt{y + 2}\right)^2$ — Eleva cada lado al cuadrado.

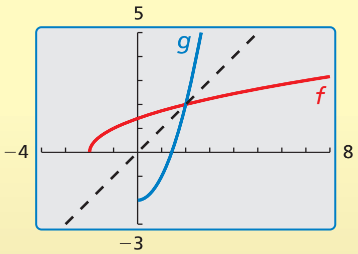
$x^2 = y + 2$ — Simplifica.

$x^2 - 2 = y$ — Resta 2 de cada lado.



▶ Dado que el rango de f es $y \geq 0$, el dominio del inverso debe restringirse a $x \geq 0$. Por lo tanto, el inverso de f es $g(x) = x^2 - 2$, donde $x \geq 0$.

Verifica



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla el inverso de la función. Luego, haz una gráfica de la función *y* de su inverso.

9. $f(x) = -x^2$, $x \leq 0$

10. $f(x) = 4x^2 + 3$, $x \geq 0$

11. ¿El inverso de $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ es una función? Halla el inverso.

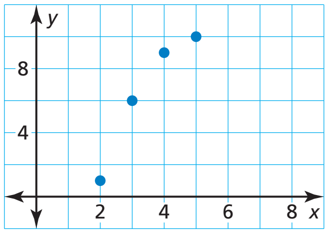
10.4 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Una relación contiene el punto $(-3, 10)$. El __________ contiene el punto $(10, -3)$.

2. **DISTINTAS PALABRAS, LA MISMA PREGUNTA** Considera la función f representada por la gráfica. ¿Cuál es diferente? Halla “ambas” respuestas.



Haz una gráfica del inverso de la función.

Refleja la gráfica de la función en el eje x.

Refleja la gráfica de la función en la línea $y = x$.

Cambia las entradas y las salidas de la función y haz una gráfica de la función resultante.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–8, halla el inverso de la relación. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $(1, 0), (3, -8), (4, -3), (7, -5), (9, -1)$

4. $(2, 1), (4, -3), (6, 7), (8, 1), (10, -4)$

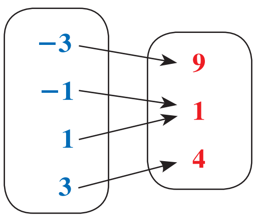
5.

Entrada	-5	-5	0	5	10
Salida	8	6	0	6	8

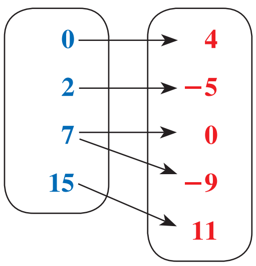
6.

Entrada	-12	-8	-5	-3	-2
Salida	2	5	-1	10	-2

7. **Entrada** **Salida**



8. **Entrada** **Salida**



En los Ejercicios 9–14, resuelve $y = f(x)$ para hallar x. Luego halla la entrada cuando la salida es 2 . *(Consulta el Ejemplo 2).*

9. $f(x) = x + 5$

10. $f(x) = 2x - 3$

11. $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$

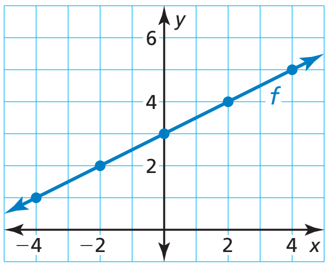
12. $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$

13. $f(x) = 9x^2$

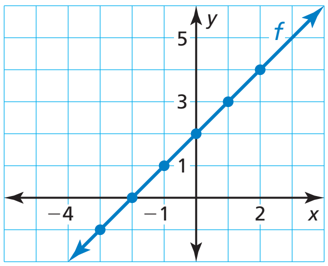
14. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7$

En los Ejercicios 15 y 16, haz una gráfica del inverso de la función reflejando la gráfica en la línea $y = x$. Describe el dominio y rango del inverso.

15.



16.



En los Ejercicios 17–22, halla el inverso de la función. Luego haz una gráfica de la función y de su inverso. *(Consulta el Ejemplo 3).*

17. $f(x) = 4x - 1$

18. $f(x) = -2x + 5$

19. $f(x) = -3x - 2$

20. $f(x) = 2x + 3$

21. $f(x) = \frac{1}{3}x + 8$

22. $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

En los Ejercicios 23–28, halla el inverso de la función. Luego haz una gráfica de la función y su inverso. *(Consulta el Ejemplo 4).*

23. $f(x) = 4x^2, x \geq 0$

24. $f(x) = -\frac{1}{25}x^2, x \leq 0$

25. $f(x) = -x^2 + 10, x \leq 0$

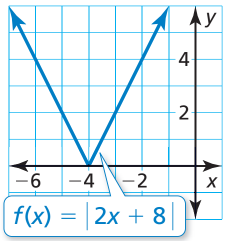
26. $f(x) = 2x^2 + 6, x \geq 0$

27. $f(x) = \frac{1}{9}x^2 + 2, x \geq 0$

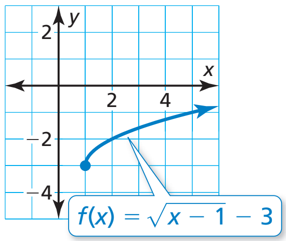
28. $f(x) = -4x^2 - 8, x \leq 0$

En los Ejercicios 29–32, usa la Prueba de línea horizontal para determinar si el inverso de *f* es una función.

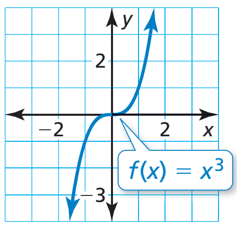
29.



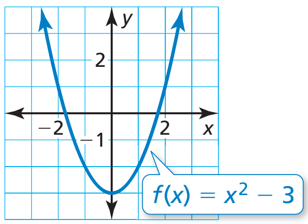
30.



31.



32.



En los Ejercicios 33–42, determina si el inverso de *f* es una función. Luego, halla el inverso. *(Consulta el Ejemplo 5).*

33. $f(x) = \sqrt{x + 3}$

34. $f(x) = \sqrt{x - 5}$

35. $f(x) = \sqrt{2x - 6}$

36. $f(x) = \sqrt{4x + 1}$

37. $f(x) = 3\sqrt{x - 8}$

38. $f(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{5x + 2}$

39. $f(x) = -\sqrt{3x + 5} - 2$

40. $f(x) = 2\sqrt{x - 7} + 6$

41. $f(x) = 2x^2$

42. $f(x) = |x|$

43. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hallar el inverso de la función $f(x) = 3x + 5$.

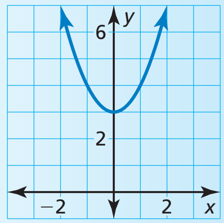
$$y = 3x + 5$$
$$y - 5 = 3x$$
$$\frac{y - 5}{3} = x$$

El inverso de *f* es $g(x) = \frac{y - 5}{3}$ o $g(x) = \frac{y}{3} - \frac{5}{3}$.

44. ANÁLISIS DE ERRORES Describe y corrige el error cometido al hallar y hacer la gráfica del inverso de la función $f(x) = \sqrt{x - 3}$.

$$y = \sqrt{x - 3}$$
$$x = \sqrt{y - 3}$$
$$x^2 = y - 3$$
$$x^2 + 3 = y$$

El inverso de *f* es $g(x) = x^2 + 3$.

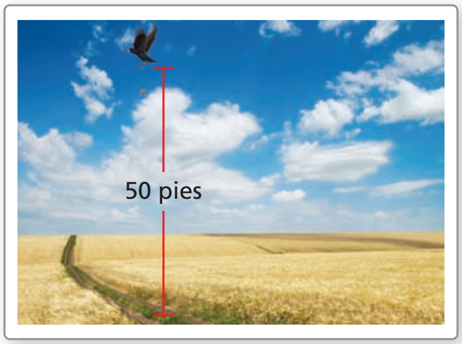


45. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS El euro es la unidad monetaria de la Unión Europea. En cierto día, el número E de euros que podían obtenerse de D dólares estadounidenses se representaba mediante la siguiente fórmula.

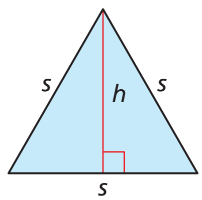
$$E = 0.74683D$$

Resuelve la fórmula D. Luego, halla el número de dólares estadounidenses que podrían obtenerse por 250 euros ese día.

46. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Un cuervo vuela a una altura de 50 pies cuando deja caer una nuez para romperla y abrirla. La altura h (en pies) de la nuez sobre el suelo puede representarse mediante $h = -16t^2 + 50$, donde t es el tiempo (en segundos) desde que el cuervo deja caer la nuez. Resuelve la ecuación para hallar t. ¿Después de cuántos segundos la nuez estará a 15 pies sobre el suelo?



CONEXIONES MATEMÁTICAS En los Ejercicios 47 y 48, *s* es la longitud del lado de un triángulo equilátero. Resuelve la fórmula para hallar *s*. Luego, evalúa la nueva fórmula para el valor dado.



47. Altura: $h = \frac{\sqrt{3}s}{2}$; $h = 16$ pulg.

48. Área: $A = \frac{\sqrt{3}s^2}{4}$; $A = 11$ pies^2

En los Ejercicios 49–54, halla el inverso de la función. Luego, haz una gráfica de la función y de su inverso.

49. $f(x) = 2x^3$

50. $f(x) = x^3 - 4$

51. $f(x) = (x - 5)^3$

52. $f(x) = 8(x + 2)^3$

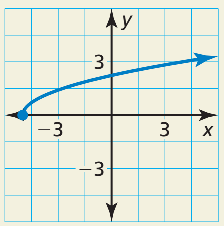
53. $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$

54. $f(x) = -\sqrt[3]{x - 1}$

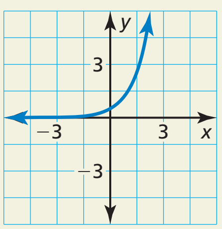
55. ARGUMENTAR Tu amigo dice que el inverso de la función $f(x) = 3$ es una función porque todas las funciones lineales pasan la Prueba de línea horizontal. ¿Tiene razón tu amigo? Explica.

56. ¿CÓMO LO VES? Une la gráfica de cada función con la gráfica de su inverso.

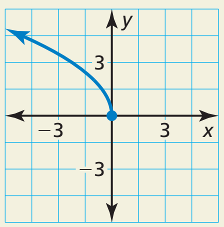
A.



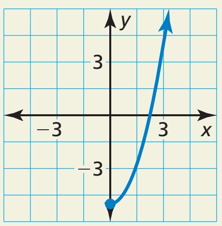
B.



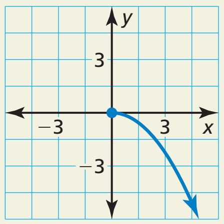
C.



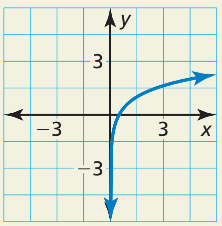
D.



E.



F.



57. ESCRIBIR Describe cambios que podrías hacer a la función $f(x) = x^2 - 5$ de modo tal que su inverso sea una función. Describe el dominio y el rango de la nueva función y de su inverso.

58. PENSAMIENTO CRÍTICO ¿Una función par puede, con al menos dos valores en su dominio, tener un inverso que sea una función? Explica.

59. FINAL ABIERTO Escribe una función de modo tal que la gráfica de su inverso sea una línea con una pendiente de 4.

60. PENSAMIENTO CRÍTICO Considera la función $g(x) = -x$.

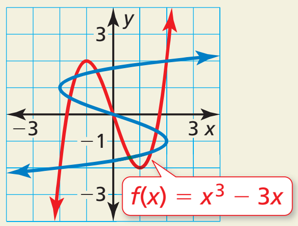
a. Haz una gráfica de $g(x) = -x$ y explica por qué es su propio inverso.

b. Haz una gráfica de otras funciones lineales que son sus propios inversos. Escribe ecuaciones de las rectas de las que haces gráficas.

c. Usa tus resultados de la parte (b) para escribir una ecuación general que describa la familia de funciones lineales que son sus propios inversos.

61. RAZONAR Muestra que el inverso de cualquier función lineal $f(x) = mx + b$, donde $m \neq 0$, también es una función lineal. Escribe la pendiente y la intersección y de la gráfica del inverso en términos de m y b.

62. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Se muestran las gráficas de $f(x) = x^3 - 3x$ y su inverso. Halla el intervalo mayor $-a \leq x \leq a$ para el cual el inverso de f es una función. Escribe una ecuación de la función inversa.



63. RAZONAR ¿El inverso de $f(x) = 2|x + 1|$ es una función? ¿Hay algún valor de a, h y k para los cuales el inverso de $f(x) = a|x - h| + k$ sea una función? Explica tu razonamiento.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Halla la suma o la diferencia. *(Sección 7.1)*

64. $(2x - 9) - (6x + 5)$

65. $(8y + 1) + (-y - 12)$

66. $(t^2 - 4t - 4) + (7t^2 + 12t + 3)$

67. $(-3d^2 + 10d - 8) - (7d^2 - d - 6)$

Haz una gráfica de la función. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = x^2$. *(Sección 8.2)*

68. $g(x) = x^2 + 6$

69. $h(x) = -x^2 - 2$

70. $p(x) = -4x^2 + 5$

71. $q(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$

10.3–10.4 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

ecuación radical, *pág. 560*
relación inversa, *pág. 568*
función inversa, *pág. 569*

Conceptos Esenciales

Sección 10.3

Elevar al cuadrado cada lado de una ecuación, *pág. 560*
Identificar soluciones extrañas, *pág. 562*

Sección 10.4

Relación inversa, *pág. 568*
Hallar inversos de funciones algebraicas, *pág. 570*
Hallar inversos de funciones no lineales, *pág. 570*
Prueba de la línea horizontal, *pág. 571*

Prácticas matemáticas

1. ¿Podrías resolver los Ejercicios 37–44 de la página 565 mediante gráficas? Explica.
2. ¿Qué recursos externos podrías usar para verificar la razonabilidad de tu respuesta en el Ejercicio 45 de la página 573?

Tarea de desempeño

Medicamentos y la Fórmula Mosteller

Al tomar un medicamento, es importante tomar la dosis correcta. Para los niños en particular, el área de superficie corporal (BSA) es un componente clave para calcular la dosis. La Fórmula Mosteller se usa comúnmente para calcular aproximadamente el área de superficie corporal. ¿Cómo usarías esa fórmula para calcular el BSA para la dosis óptima?

Para explorar las respuestas a esta pregunta y más, visita ***BigIdeasMath.com***.

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

10.1 Hacer una gráfica de las funciones de raíz cuadrada (págs. 543–550)

a. Describe el dominio de $f(x) = 4\sqrt{x + 2}$.

El radicando no puede ser negativo. Por lo tanto, $x + 2$ es mayor que o igual a 0.

$x + 2 \geq 0$ — Escribe una desigualdad para el dominio.

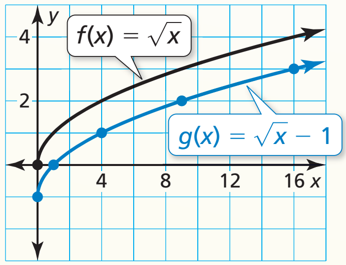
$x \geq -2$ — Resta 2 de cada lado.

▶ El dominio es el conjunto de números reales mayor que o igual a -2.

b. Haz una gráfica de $g(x) = \sqrt{x} - 1$. Describe el rango. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

Paso 1 Usa el dominio de g, $x \geq 0$, para hacer una tabla de valores.

x	0	1	4	9	16
$g(x)$	-1	0	1	2	3



Paso 2 Marca los pares ordenados.

Paso 3 Dibuja una curva suave a través de los puntos, comenzando en $(0, -1)$.

▶ El rango de g es $y \geq -1$. La gráfica de g es una traslación de 1 unidad hacia debajo de la gráfica de f.

Haz una gráfica de esta función. Describe el dominio y el rango. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

1. $g(x) = \sqrt{x} + 7$

2. $h(x) = \sqrt{x - 6}$

3. $r(x) = -\sqrt{x + 3} - 1$

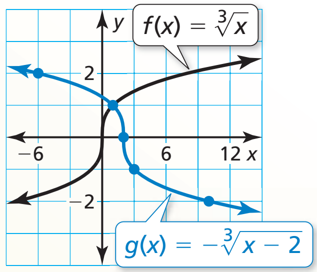
4. Imagina que $g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x - 6} + 2$. Describe las transformaciones a partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ a la gráfica de g. Luego, haz una gráfica de g.

10.2 Hacer una gráfica de las funciones de raíz cúbica (págs. 551–556)

Haz una gráfica de $g(x) = -\sqrt[3]{x - 2}$. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Paso 1 Haz una tabla de valores.

x	-6	1	2	3	10
$g(x)$	2	1	0	-1	-2



Paso 2 Marca los pares ordenados.

Paso 3 Dibuja una curva suave a través de los puntos.

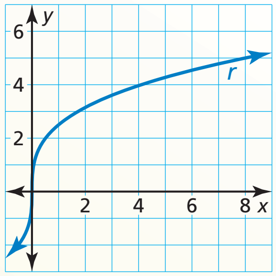
▶ La gráfica de g es una traslación de 2 unidades a la derecha y una reflexión en el eje x de la gráfica de f.

Haz una gráfica de la función. Compara la gráfica con la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

5. $g(x) = \sqrt[3]{x} + 4$ **6.** $h(x) = -8\sqrt[3]{x}$ **7.** $s(x) = \sqrt[3]{-2(x-3)}$

8. Imagina que $g(x) = -3\sqrt[3]{x+2} - 1$. Describe las transformaciones a partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a la gráfica de g. Luego, haz una gráfica de g.

9. Se muestra la gráfica de una función de raíz cúbica r. Compara la tasa de cambio promedio con la tasa de cambio promedio de $p(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x}$ en el intervalo $x = 0$ a $x = 8$.



10.3 Resolver ecuaciones radicales (págs. 559–566)

Resuelve $\sqrt{10 - 3x} = x$.

$\sqrt{10 - 3x} = x$ Escribe la ecuación.

$\left(\sqrt{10 - 3x}\right)^2 = x^2$ Eleva al cuadrado cada lado de la ecuación.

$10 - 3x = x^2$ Simplifica.

$0 = x^2 + 3x - 10$ Resta 10 y suma $3x$ a cada lado.

$0 = (x - 2)(x + 5)$ Factoriza.

$x - 2 = 0$ o $x + 5 = 0$ Propiedad del producto cero

$x = 2$ o $x = -5$ Resuelve para hallar x.

Verifica Verifica cada solución en la ecuación original.

$\sqrt{10 - 3(2)} \stackrel{?}{=} 2$ Sustituye por x. $\sqrt{10 - 3(-5)} \stackrel{?}{=} -5$

$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$ Simplifica. $\sqrt{25} \stackrel{?}{=} -5$

$2 = 2$ ✓ Simplifica. $5 \neq -5$ ✗

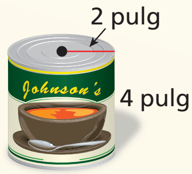
▶ Dado que $x = -5$ no satisface la ecuación original, es una solución extraña. La única solución es $x = 2$.

Resuelve la ecuación, Verifica tu(s) solución(es).

10. $8 + \sqrt{x} = 18$ **11.** $\sqrt[3]{x - 1} = 3$ **12.** $\sqrt{5x - 9} = \sqrt{4x}$

13. $x = \sqrt{3x + 4}$ **14.** $8\sqrt{x - 5} + 34 = 58$ **15.** $\sqrt{5x} + 6 = 5$

16. El radio r de un cilindro está representado por la función $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$, donde V es el volumen y h es la altura del cilindro. ¿Cuál es el volumen de la lata cilíndrica?



10.4 Inverso de una función (págs. 567–574)

a. Halla el inverso de la relación.

Entrada	-4	-2	0	2	4	6
Salida	-3	0	3	6	9	12

Relación inversa:

Entrada	-3	0	3	6	9	12
Salida	-4	-2	0	2	4	6

Cambia las entradas y salidas.

b. Halla el inverso de $f(x) = \sqrt{x-4}$. Luego, haz una gráfica de la función y de su inverso.

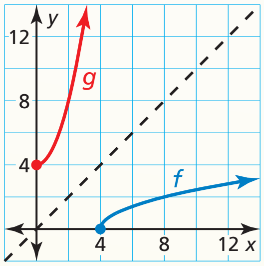
$y = \sqrt{x-4}$ — Coloca *y* igual a *f*(*x*).

$x = \sqrt{y-4}$ — Cambia *x* y *y* en la ecuación.

$x^2 = \left(\sqrt{y-4}\right)^2$ — Eleva al cuadrado cada lado.

$x^2 = y - 4$ — Simplifica.

$x^2 + 4 = y$ — Suma 4 a cada lado.



Dado que el rango de *f* es $y \geq 0$, el dominio del inverso debe estar restringido a $x \geq 0$.

▶ Por lo tanto, el inverso de *f* es $g(x) = x^2 + 4$, donde $x \geq 0$.

Halla el inverso de la relación.

17. $(1, -10), (3, -4), (5, 4), (7, 14), (9, 26)$

18.

Entrada	-4	-2	0	2	4
Salida	6	3	0	-3	-6

Halla el inverso de la función. Luego haz la gráfica de la función y de su inverso.

19. $f(x) = -5x + 10$

20. $f(x) = 3x^2 - 1, x \geq 0$

21. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x+6}$

22. Considera la función $f(x) = x^2 + 4$. Usa la Prueba de línea horizontal para determinar si el inverso de *f* es una función.

23. En los bolos, un hándicap es un ajuste a la puntuación de un jugador para emparejar las diferencias en los niveles de habilidades. En una liga particular, puedes encontrar el hándicap *h* de un jugador de bolos mediante la fórmula $h = 0.8(210 - a)$, donde *a* es el promedio del jugador. Resuelve la fórmula para hallar *a*. Luego halla el promedio de un jugador cuando su hándicap es 28.

10 Prueba del capítulo

Halla el inverso de una función.

1. $f(x) = 5x - 8$

2. $f(x) = 2\sqrt{x+3} - 1$

3. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4, x \geq 0$

Haz una gráfica de la función *f*. Describe el dominio y el rango. Compara la gráfica de *f* con la gráfica de *g*.

4. $f(x) = -\sqrt{x+6}$; $g(x) = \sqrt{x}$

5. $f(x) = \sqrt{x-3} + 2$; $g(x) = \sqrt{x}$

6. $f(x) = \sqrt[3]{x} - 5$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$

7. $f(x) = -2\sqrt[3]{x+1}$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$

Resuelve la ecuación. Verifica tu(s) solución(es).

8. $9 - \sqrt{x} = 3$

9. $\sqrt{2x-7} - 3 = 6$

10. $\sqrt{8x-21} = \sqrt{18-5x}$

11. $x + 5 = \sqrt{7x+53}$

12. Al resolver la ecuación $x - 5 = \sqrt{ax+b}$, obtienes $x = 2$ y $x = 8$. Explica por qué al menos una de estas soluciones debe ser extraña.

Describe las transformaciones a partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a la gráfica de la función dada. Luego, haz la gráfica de la función dada.

13. $h(x) = 4\sqrt[3]{x-1} + 5$

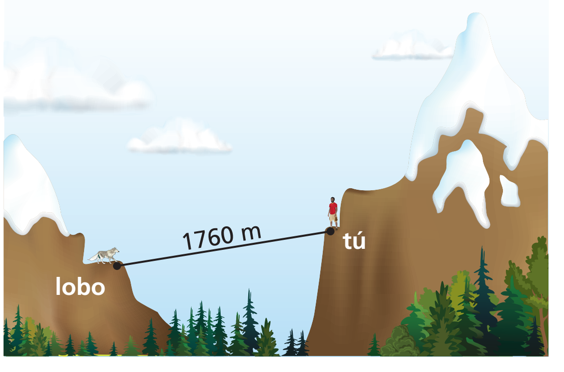
14. $w(x) = -\sqrt[3]{x+7} - 2$

15. La velocidad v (en metros por segundo) de una montaña rusa al pie de una colina se da mediante $v = \sqrt{19.6h}$, donde h es la altura (en metros) de la colina. (a) Usa una calculadora gráfica para hacer una gráfica de la función. Describe el dominio y el rango. (b) ¿Qué tan alto debe ser la colina para que la velocidad de la montaña rusa al pie de la colina sea al menos 28 metros por segundo? (c) ¿Qué sucede con la tasa de cambio promedio de la velocidad a medida que aumenta la altura de la colina?

16. La velocidad s (en metros por segundo) del sonido a través del aire se da mediante $s = 20\sqrt{T+273}$, donde T es la temperatura (en grados Celsius).

a. ¿Cuál es la temperatura cuando la velocidad del sonido a través del aire es de 340 metros por segundo?

b. ¿Cuánto tiempo te lleva escuchar al lobo aullar cuando la temperatura es de −17°C?



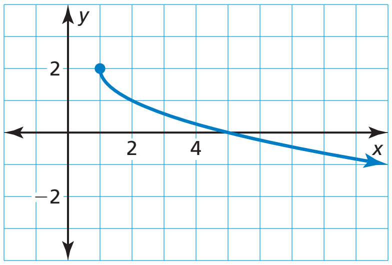
17. ¿Cómo puedes restringir el dominio de la función $f(x) = (x-3)^2$ de modo tal que el inverso de f sea una función?

18. Escribe una función radical que tenga un dominio de todos los números reales menores que o iguales a 0 y un rango de todos los números reales mayores que o iguales a 9.

10 Evaluación acumulativa

1. Completa la función de modo tal que sea representada por la gráfica.

$f(x) = \square\sqrt{x - \square} + \square$



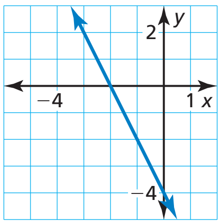
2. Considera la ecuación $y = mx + b$. Completa los valores para m y b de modo tal que cada enunciado sea verdadero.

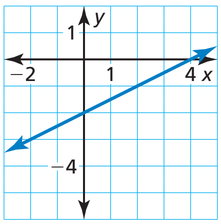
a. Cuando $m =$ _______ y $b =$ _______, la gráfica de la ecuación pasa a través del punto $(-1, 4)$.

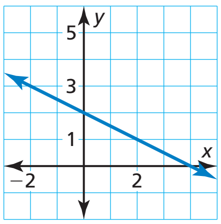
b. Cuando $m =$ _______ y $b =$ _______, la gráfica de la ecuación tiene una pendiente positiva y pasa a través del punto $(-2, -5)$.

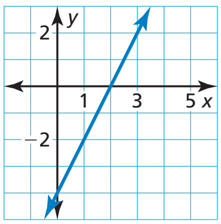
c. Cuando $m =$ _______ y $b =$ _______, la gráfica de la ecuación es perpendicular a la gráfica de $y = 4x - 3$ y pasa a través del punto $(1, 6)$.

3. ¿Cuál gráfica representa el inverso de la función $f(x) = 2x + 4$?

Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


4. Considera la ecuación $x = \sqrt{ax + b}$. El estudiante A afirma que esta ecuación tiene una solución real. El estudiante B afirma que esta ecuación tiene dos soluciones reales. Usa los números para responder las partes (a)–(c).

−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

a. Elige los valores para a y b para crear una ecuación que apoye la afirmación del Estudiante A.

b. Elige los valores para a y b para crear una ecuación que apoye la afirmación del Estudiante B.

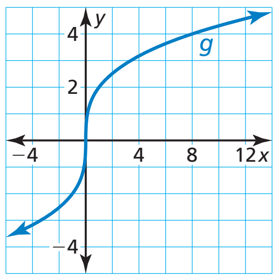
c. Elige los valores para a y b para crear una ecuación que no apoye la afirmación de ninguno de los estudiantes.

5. ¿Cuál ecuación representa el enésimo término de la secuencia 3, 12, 48, 192, . . .?

Ⓐ $a_n = 3(4)^{n-1}$ Ⓑ $a_n = 3(9)^{n-1}$

Ⓒ $a_n = 9n - 6$ Ⓓ $a_n = 9n + 3$

6. Considera la función $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x+3}$. La gráfica representa la función g. Selecciona todos los enunciados que sean verdaderos.

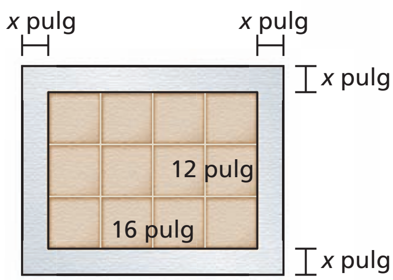


- La intersección con el eje x de la gráfica de f es mayor que la intersección con el eje x de la gráfica de g.
- La gráfica de g siempre aumenta.
- La tasa de cambio promedio de g disminuye a medida que x aumenta.
- La tasa de cambio promedio de f aumenta a medida que x aumenta.
- La tasa de cambio promedio de g es mayor que la tasa de cambio promedio de f en el intervalo $x = 0$ a $x = 8$.

7. Coloca cada función en una de las tres categorías.

Ningún cero	**Un cero**	**Dos ceros**
$f(x) = 3x^2 + 4x + 2$ $f(x) = -x^2 + 2x$	$f(x) = 4x^2 - 8x + 4$ $f(x) = x^2 - 3x - 21$	$f(x) = 7x^2$ $f(x) = -6x^2 - 5$

8. Estás haciendo la parte superior de una mesa con un centro de mosaicos y un borde uniforme de mosaicos.



a. Escribe el polinomio en forma estándar que represente el perímetro de la parte superior de la mesa.

b. Escribe el polinomio en forma estándar que represente el área de la parte superior de la mesa.

c. El perímetro de la parte superior de la mesa es menor a 80 pulgadas y el área de la mesa es al menos 252 pulgadas cuadradas. Selecciona todos los valores posibles de x.

0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4